

Zur Linienentstehung und Diagnostik in kleinskaligen Magnetfeldern der solaren Photosphäre

Ein Modell des stochastischen Transports
polarisierter Strahlung

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
in der Wissenschaftsdisziplin Astrophysik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

von

THORSTEN ANTHONY CARROLL

Potsdam, im Februar 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Überblick	1
1.2	Motivation	3
1.3	Kleinskalige magnetische Elemente	5
1.4	Diagnostik kleinskaliger magnetischer Strukturen	6
2	Der polarisierte Strahlungstransport	11
2.1	Lokales Thermisches Gleichgewicht	11
2.2	Der Zeeman-Effekt	12
2.3	Die Stokes-Parameter	14
2.4	Der skalare Strahlungstransport	16
2.5	Der Strahlungstransport im Magnetfeld	19
2.6	Formale Lösung des polarisierten Strahlungstransports	21
3	Der stochastische polarisierte Strahlungstransport	23
3.1	Zur Bedeutung von Korrelationseffekten	24
3.2	Der stochastische Prozess	26
3.3	Der Markov-Prozess	27
3.4	Die Master-Gleichung	29
3.5	Die Fokker-Planck-Gleichung	31
3.6	Struktur und Korrelationseigenschaften	32
3.7	Die stochastische Transportgleichung	35
4	Eigenschaften der stochastischen Transportgleichung	43
4.1	Die formale Lösung im stochastischen Medium	43
4.2	Mikro- und makroturbulente Grenzfälle	44
4.3	Asymmetrische Stokes-V-Profile	47
4.3.1	Netto-Zirkular-Polarisation	47

4.3.2	Symmetrie-Betrachtungen	48
4.3.3	Entstehung der Netto-Zirkular-Polarisation	49
4.4	Response-Funktionen im stochastischen Medium	53
5	Numerische Lösung	55
5.1	Lösung des Differentialgleichungssystems	55
5.2	Fehlerbetrachtung	58
5.3	Implementation	59
6	Ein mesoturbulentes Geschwindigkeitsfeld	61
6.1	Modellbeschreibung	61
6.2	Ergebnisse	63
7	Ein mesoturbulentes magnetisches Gebiet	67
7.1	Modellbeschreibung	67
7.2	Ergebnisse	69
8	Zur Struktur der Penumbra	77
8.1	Mitte-Rand-Variation der NCP	78
8.2	Interpretation der Mitte-Rand-Variation	79
9	Magnetfeldstrukturen in der ruhigen Sonne	85
9.1	Wahrscheinlichkeitsdichte der Magnetfeldstärke	86
9.2	Zur Diskrepanz der Magnetfeldbestimmung	87
10	Ausblick: Inversion von Stokes-Profilen	95
10.1	Konventionelle Inversion	95
10.2	Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen	96
11	Zusammenfassung	99
	Literaturverzeichnis	103

Abbildungsverzeichnis

6.1	Darstellung der Profilform in Abhängigkeit von der Korrelationslänge l . Die Intensität ist normiert auf das lokale Kontinuum I_c . Links die Darstellung der Profilformen für einen Turbulenzparameter $\xi_{meso} = 2km/s$ und in der rechten Darstellung für $\xi_{meso} = 4km/s$	64
6.2	Darstellung der Äquivalenzbreite in Abhängigkeit von der Korrelationslänge l . In der linken Darstellung ist der Verlauf der Äquivalenzbreite mit zunehmender Korrelationslänge aufgetragen für einen Turbulenzparameter $\xi_{meso} = 2km/s$ und rechts der Verlauf mit einem Turbulenzparameter $\xi_{meso} = 4km/s$. Die beiden horizontalen Linien kennzeichnen die Äquivalenzbreite eines Profils, das bei sonst gleichen Bedingungen für den konventionell berechneten makroturbulenten Fall (untere horizontale Linie) und für den mikroturbulenten Fall (obere horizontale Linie) berechnet wurde.	64
7.1	Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 1000$ km.	70
7.2	Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 500$ km.	70
7.3	Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 100$ km.	71
7.4	Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 50$ km.	71
7.5	Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 10$ km.	71
7.6	Darstellung der Stokes I und Stokes V Profile, berechnet unter dem stochastischen mesostrukturierten Ansatz mit einer Korrelationslänge $l = 10$ km (durchgezogene Linie) und unter dem mikrostrukturierten Grenzfall, MISMA (gepunktete Linie).	72
7.7	Abhängigkeit der Netto-Zirkular-Polarisation (NCP) von der Korrelationslänge l . Die obere horizontale Linie gibt die NCP an, wie sie sich aus der Berechnung für den mikrostrukturierten Grenzfall ergibt, während die untere horizontale Linie die NCP des makrostrukturierten Grenzfalles darstellt.	73
7.8	Darstellung der Streuwahrscheinlichkeit für verschiedene Korrelationslängen l über die logarithmische optische Tiefe τ bei $5000 \text{ \AA}$, bezogen auf die unmagnetische Atmosphäre. Im Hintergrund, mit durchgezogener Linie ist die Beitragsfunktion für das Wellenlängenzentrum dargestellt.	74

7.9	Netto-Zirkular-Polarisations-Response-Funktion für verschiedene Korrelationslängen l , aufgetragen über der geometrischen Höhe z , wobei der Nullpunkt $z = 0$ innerhalb der unmagnetischen Komponente bei $\log(\tau_{5000}) = 0$ festgelegt wurde.	75
8.1	Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation in Abhängigkeit vom Kosinus des heliozentrischen Winkels θ für verschiedene Korrelationslängen l bei Beobachtung der zentrumsseitigen Penumbra.	80
8.2	Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation in Abhängigkeit vom Kosinus des heliozentrischen Winkels θ für verschiedene Korrelationslängen l bei Beobachtung der randseitigen Penumbra.	80
8.3	Die Entwicklung der Netto-Zirkular-Polarisation (NCP) durch die Atmosphäre für verschiedenen Korrelationslängen l	83
9.1	Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) für eine makrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10^4$ km.	88
9.2	Darstellung des aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profil der Eisenlinien Fe I 15648 Å für eine makrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10^4$ km.	88
9.3	Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) für eine magnetisch mikrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km.	90
9.4	Darstellung des aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profil der Eisenlinien Fe I 15648 Å für eine magnetisch mikrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km.	90
9.5	Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) für eine Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km für Subkilogauss-Strukturen und $l = 70$ km für Kilogauss-Strukturen.	92
9.6	Darstellung des aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profiles der Eisenlinie Fe I 15648 Å für eine Atmosphäre mit denselben Eigenschaften wie in Abbildung 9.5 beschrieben.	92
9.7	Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) in einer Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km für Subkilogauss-Strukturen und $l = 70$ km für Kilogauss-Strukturen. Zusätzlich besitzen die feldfreien Strukturen gegenüber den magnetischen Strukturen eine Nettogeschwindigkeit von 550 m/s.	93
9.8	Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der Eisenlinien Fe I 15648 Å mit gleicher Atmosphärenstruktur wie auch in Abbildung 9.7 beschrieben.	93

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Überblick

Der Großteil unserer Erkenntnis über die Sonne und die anderen Sterne basiert fast ausschließlich auf der Analyse der elektromagnetischen Strahlung, die von ihnen ausgesendet wird. Auf der Grundlage einer fundierten Theorie des Strahlungstransports und der Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung und Materie vermag die Analyse von Sternenspektren eine Vielzahl von Informationen zu Tage zu fördern. Gerade die Sonne bietet, aufgrund ihrer Nähe zur Erde, eine einzigartige Gelegenheit, astrophysikalische Prozesse auf der Oberfläche eines gewöhnlichen Hauptreihensterns mit hoher Auflösung zu studieren. Erst dadurch können theoretische Modelle solcher Vorgänge im Detail getestet werden und schließlich auch auf andere Sternentypen extrapoliert werden.

Eine der herausragendsten Eigenschaften der Sonne ist zweifellos ihr Magnetfeld und dessen Einfluß und Mitwirken auf eine Vielzahl von beobachtbaren Phänomenen, wie zum Beispiel die Sonnenflecken und deren 11-jähriger Aktivitätszyklus. Nicht zuletzt auch der Einfluss der Sonnenaktivität auf das Erdklima machen so das Verständnis und das Zusammenwirken solarer Magnetfelder zu einem der Hauptforschungsschwerpunkte innerhalb der Sonnenphysik. Magnetfelder hinterlassen ihre *Spuren* im Sonnenspektrum und bieten so einen Ansatzpunkt für deren Untersuchung. Hierbei sind es die magnetisch sensitiven Absorptionslinien im Spektrum, die durch ihre Aufspaltung und Polarisierung, also den Zeeman-Effekt, einen wichtigen Beitrag zur Erschließung dieser Informationen liefern. Das Wissen um die Mechanismen der Linienentstehung in der Sonnenatmosphäre ermöglicht so, zumindest prinzipiell, eine Analyse und Bestimmung der physikalischen Verhältnisse am Ort der Wechselwirkung von Strahlung, Materie und Magnetfeld.

Auch diese Arbeit beschäftigt sich mit dem polarisierten Strahlungstransport unter dem besonderen Aspekt einer kleinskaligen und nicht aufgelösten Magnetfeldstrukturierung. Die a priori unbekannten strukturellen magnetischen Eigenschaften der Atmosphäre jenseits des Auflösungsvermögens sollen dabei durch ein stochastisches Modell adäquat beschrieben werden. Die daraus resultierende stochastische Strahlungstransportgleichung ermöglicht es, Effekte zu beschreiben, die unmittelbar auf die Strukturlänge der magnetischen Elemente zurückzuführen sind.

Im weiteren dieses einleitenden Kapitels wird zunächst in 1.2 eine Motivation zu dieser Arbeit gegeben werden. In Abschnitt 1.3 soll dann ein allgemeiner Überblick über kleinskalige

magnetische Strukturen der Photosphäre gegeben werden, um danach in Abschnitt 1.4 zu skizzieren, mit welchen Methoden spektropolarimetrische Informationen aus kleinskaligen magnetischen Elementen analysiert und interpretiert werden. Weiterhin sollen auch die Grenzen und Nachteile dieser Methoden beschrieben werden.

Die Arbeit gliedert sich danach wie folgt : In Kapitel 2 werden die Grundlagen des elementaren polarisierten Strahlungstransports beschrieben. Dabei werden kurz der Zeeman-Effekt beschrieben sowie der Stokes-Vektor eingeführt. Nach einer kurzen Erläuterung des skalaren Strahlungstransports in einer planparallelen Atmosphäre wird gleich anschließend der Strahlungstransport im Magnetfeld betrachtet. Zum Abschluss wird kurz auf die formale Lösung der polarisierten Strahlungstransportgleichung eingegangen.

Kapitel 3 stellt den Kern dieser Arbeit dar. Hier wird der polarisierte Strahlungstransport, auf der Basis eines stochastischen Prozesses, für ein stochastisch organisiertes Medium entwickelt. Zunächst wird dabei in Kapitel 3 auf die besondere Rolle von Korrelationseffekten hingewiesen, also die Bedeutung die eine endliche Ausdehnung der atmosphärischen Strukturen auf den Strahlungstransport hat. Darauf folgend werden die Grundlagen eines stochastischen Prozesses dargelegt. Im Anschluss wird dann der Markov-Prozess, als eine besondere Realisierung eines stochastischen Prozesses, dargestellt. Mit der Hilfe des Markov-Prozesses wird dann die sogenannte Master-Gleichung hergeleitet, die von wesentlicher Bedeutung für die folgende Entwicklung der stochastischen Transportgleichung ist. Es folgt eine Beschreibung der Korrelations- als auch der strukturellen Eigenschaften der in dieser Arbeit betrachteten Atmosphären. Diese Beschreibungen bilden die Grundlagen für die am Ende dieses Abschnittes folgende Ableitung der stochastischen Transportgleichungen für polarisiertes Licht.

In Kapitel 4 werden einige Eigenschaften der stochastischen Transportgleichung sowie Gemeinsamkeiten mit der konventionellen Transportgleichung beschrieben. Dabei wird zunächst gezeigt, dass eine Formulierung einer formalen Lösung in gleicher Weise möglich ist wie bei der herkömmlichen polarisierten Strahlungstransportgleichung. Es wird weiterhin gezeigt, wie die Grenzfälle einer mikroturbulenten sowie makroturbulenten atmosphärischen Struktur in natürlicher Weise in dem Formalismus der stochastischen Transportgleichungen enthalten sind. Weiterhin soll auch gezeigt werden, wie es unter der stochastischen Beschreibung des Strahlungstransports zu einer nicht verschwindenden Netto-Zirkular-Polarisation kommen kann. Zum Abschluss von Kapitel 4 werden die für den konventionellen Strahlungstransport im Magnetfeld eingeführten Response-Funktionen auf den hier entwickelten stochastischen Fall erweitert.

Kapitel 5 behandelt die numerische Lösung des nach der Diskretisierung der Integro-Differentialgleichung entstehenden gekoppelten Differentialgleichungssystems. Für das beschriebene Verfahren wird zum Abschluss des Kapitels eine Fehlerbetrachtung durchgeführt. Im Kapitel 6 erfolgen erste Modellrechnungen des entwickelten stochastischen Strahlungstransports für polarisiertes Licht auf der Basis der im vorangegangenen Kapitel entwickelten numerischen Lösung. Dabei wird ein mesoturbulentes Geschwindigkeitsfeld untersucht sowie dessen Wirkung auf das beobachtbare Profil und der daraus abgeleiteten Äquivalenzbreite. Im Anschluss daran wird in Kapitel 7 ein magnetisches Gebiet simuliert, dessen magnetische Strukturen verschiedene strukturelle Ausdehnungen besitzen. Hierbei werden Profilformen, als auch die aus den Stokes-V-Profilen abgeleitete Netto-Zirkular-Polarisation, eingehend untersucht und die Effekte einer endlichen Ausdehnung der magnetischen Strukturen besprochen.

In Kapitel 8 wird beschrieben welche Auswirkungen eine stochastische Organisation mit endlicher Korrelationslänge der atmosphärischen Verhältnisse innerhalb der Penumbra auf das beobachtbare Stokes-Spektrum haben kann. Dabei wird die makroskopisch beobachtbare Größe in Form der Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation benutzt um ein Zusammenhang zwischen dieser Größe und dem heliozentrischen Winkel sowie der Korrelationslänge herzustellen. Als weitere Anwendung wird in Kapitel 9 die aus Beobachtungen in den Internetzwerkgebieten der ruhigen Sonne festgestellte systematische Differenz bei der Bestimmung der Magnetfeldstärke, wie sie sich aus Linien des sichtbaren und des infraroten Wellenlängenbereich ergeben, untersucht. Dabei ergibt sich auf der Basis einer stochastisch organisierten Atmosphäre eine Erklärung für die beobachteten Diskrepanzen.

In Kapitel 10 wird ein Ausblick gegeben wie auf der Basis des in dieser Arbeit entwickelten stochastischen Strahlungstransports eine Inversion von Stokes-Profilen durchgeführt werden kann. Dabei werden sowohl die Möglichkeiten einer Inversion mit konventionellen Methoden betrachtet als auch die Möglichkeit einer Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen. Schließlich folgt in Kapitel 11 eine Zusammenfassung der hier vorliegenden Arbeit wobei die wesentlichen Ergebnisse und Aussagen nochmals zusammengestellt werden.

1.2 Motivation

Die Frage nach der Natur kleinskaliger Strukturen und Prozesse, insbesondere des Magnetfeldes und der Geschwindigkeit in allen Schichten der Sonnenatmosphäre und Konvektionszone, gehört zu den fundamentalen Problemen der Astrophysik. Ohne Beantwortung dieser Fragen bleiben andere fundamentale Probleme wie die nach den Ursachen der Koronaheizung, des Aktivitätszyklus und einzelner Aktivitätsphänomene wie z.B. von Flares unlösbar. Dabei bedeutet *kleinskalig* in diesem Fall Längen unterhalb der Druck- und Dichteskalenhöhe oder der mittleren freien Weglänge von Photonen, bei einer optischen Dicke $\tau \approx 1$ im sichtbaren Kontinuum bei 500 nm, d.h. einer Länge von ca. 10^5 m in der Photosphäre. Beobachtungen mit den leistungsfähigsten Sonnenteleskopen erlauben heute aber nur Bildauflösungen von $0''.2$ (150 km) in breitbandigen Filtergrammen und bestenfalls $0''.8$ (600 km) bei spektropolarimetrischen Messungen.

Traditionelle Auswertungen von Zeeman-Effekt-Messungen in der ruhigen Sonnenatmosphäre ergeben Hinweise auf starke Konzentrationen des magnetischen Flusses. Diese werden als magnetische Flussröhren interpretiert, welche Feldstärken im kG-Bereich aufweisen und in der ruhigen Sonne nur ca. 1 % des Volumens einnehmen, während zunächst die gesamte restliche Atmosphäre als weitgehend feldfrei angesehen wird. Kleinskalige, schwache und zufällig orientierte Magnetfeldstrukturen lassen sich hingegen nicht ohne weiteres mit herkömmlichen Zeeman-Effekt-Messungen nachweisen. Komplementäre Hanle-Effekt-Messungen zeigen jedoch tatsächlich die Existenz solcher zufällig orientierter turbulenter Magnetfelder in der gesamten Photosphäre (Stenflo et al., 1998). Auch die häufig beobachtete Asymmetrie der Stokes-V-Profile, besonders ausgeprägt in der Sonnenflecken-Penumbra, aber auch in Netzwerk und in Internetzwerkgebieten, sind deutliche Hinweise auf eine kleinskalige Magnetfeldstrukturierung. Im MISMA-Modell ('Micro-Structured Magnetic Atmosphere'; Sanchez-Almeida et al. 1996) werden solche Profile durch die Annahme eines *mikroturbulenten* Magnetfeldes, in Analogie zum Mikroturbulenz-Modell der Doppler-Geschwindigkeiten, erklärt. Die Frage nach den wirklichen Skalen der Magnet-

feldstrukturen vermag sowohl dieser Ansatz als auch die Hanle-Effekt-Messung, bei denen ebenfalls ein mikroturbulentes Modell zugrundeliegt, nicht zu beantworten.

Zeitreihen hochaufgelöster Beobachtungen kleiner magnetischer Konzentrationen in Form magnetischer heller Punkte zeigen, dass sich diese Strukturen in einem starken dynamischen Zustand befinden und ihre Morphologie in Zeitskalen ≤ 100 s völlig verändern können (Berger & Title, 1996; Berger et al. 1998). Diese Beobachtungen sind mit den weitverbreiteten Modellen stabiler oder oszillierender Flussröhren nur schwer vereinbar.

Moderne numerische Simulationen turbulenter Magneto-Konvektion (Cattaneo, 1999; Emmonet & Cattaneo, 2001) unterstützen die Vorstellung einer *schnellen Dynamo-Theorie*, dass jede chaotische 3-D-Strömung mit hoher Reynolds-Zahl als Dynamo wirkt (Vainshtain & Kitchatinov, 1986). Thermisch angetriebene turbulente Konvektion kann demnach lokal einen beträchtlichen Anteil magnetischer Energie erzeugen und aufrechterhalten. In der ruhigen Sonne und in Fackel-Gebieten sind diese Magnetfelder räumlich stark intermittierend; neben einem schwachen allgemeinen Feld existieren starke Fluktuationen mit Skalen unterhalb der Auflösungsgrenze. Das Spektrum der Feldstärken umfaßt ein Kontinuum schwacher Felder im größten Teil des Volumens und starke Feldkonzentrationen (der Vorstellung nach magnetisch dünne Flussröhren) mit einem Füllfaktor von wenigen Prozent. Schätzungen der magnetischen Reynoldszahl an oberen Rand der Konvektionszone zeigen, dass eine Feldstrukturierung bis hinunter zu Skalen von wenigen Kilometern denkbar ist (Stix, 1989).

Aber auch größere Strukturen wie die Mesogranulation können offenbar durch einen solchen *mikroskopischen turbulenten Dynamo* im Zusammenspiel mit turbulenter Konvektion (Granulation) erzeugt werden (Cattaneo et al., 2001), und in weiterreichenden Spekulationen wurde selbst die Notwendigkeit eines global operierenden Dynamos angezweifelt, wie er von der Elektrodynamik mittlerer Felder zur Erklärung des Aktivitätszyklus erarbeitet wurde. In jüngeren Überlegungen wird eher angenommen, dass jede Bewegung mit einer bestimmten kohärenten Skala Magnetfelder mit vergleichbaren kohärenten Skalen erzeugt, dass aber nur in sehr spezielle Regionen, z.B. der Tachocline, das Magnetfeld mit großen Skalen organisiert werden kann (Cattaneo, 2000). Solche Vorstellungen sind natürlich nicht unumstritten, da sich die numerischen Simulationen bisher auf zahlreiche vereinfachendere Näherungen stützen müssen: Boussinesq-Strömungen, Vernachlässigung von Ionisation, Kompressibilität und Strahlungstransport; konstante Werte für kinematische Viskosität, thermische und magnetische Diffusivität; planparallele Schichtung, vereinfachte Randbedingungen wie undurchlässige, spannungsfrei horizontale Randflächen mit konstanter Temperatur und verschwindendem horizontalen Magnetfeld.

Kleinskalige magnetischen Strukturen scheinen aber auch wesentliche Bedeutung für die Struktur und Stabilität großskaliger Phänomene wie Sonnenflecken zu haben. Sowohl die Umbra als auch die Penumbra zeigen auf Skalen unter 100 km Variationen in der Helligkeit, die einen Temperaturunterschied von ca. 1000 K bedeuten, sowie Variationen in Geschwindigkeiten und Magnetfeldneigungen. Offensichtlich scheinen wesentliche magneto-konvektive Prozesse auf diesen Grössenskalen von Bedeutung zu sein. Interessante Modellierungen und Simulationen der Magnetokonvektion in der Flecken-Penumbra wurden von Schlichenmaier et al. (1998) durchgeführt, in denen sich die Penumbra aus kleinskaligen magnetischen Flussröhren konstituiert, die eingebettet in einem weitgehend homogenen Hintergrundfeld, das heiße Plasma nach außen transportieren. Mit diesem Modell konnten bereits einige Beobachtungsphänomene erklärt werden (Schlichenmaier et al., 2001; Müller

et al., 2002). Aber auch diese Modellierungen basieren auf vereinfachenden Annahmen, so dass deren Nähe zur Realität noch weiter zu prüfen bleibt.

Es wird also wesentlich für unser weiteres Verständnis sein, mehr über die physikalische Natur dieser kleinskaligen und zum Teil nicht auflösbaren magnetischen Elemente zu erfahren. Dazu dienen zum einen Anstrengungen im Rahmen internationaler Projekte zum Neubau neuer und leistungsstarker Teleskope wie GREGOR (v. d. Lühse et al., 1999) und das geplante Advanced Technology Solar Telescope (ATST, Keil et al., 2001) mit einem angestrebten Auflösungsvermögen von 0.1 Bogensekunden, um so die fundamentele Längenskalen in der Sonnenatmosphäre aufzulösen. Zum anderen müssen bestehende Methoden zur indirekten Erschließung der Information über das Magnetfeld mit Hilfe spektropolarimetrischer Messungen weiter verbessert werden. Die Interpretation dieser Daten erfordern dabei neben einer genauen Kenntnis des polarisierten Strahlungstransports eine angemessene Modellierung der atmosphärischen Magnetfeldstrukturen.

1.3 Kleinskalige magnetische Elemente

Das großskalige Muster des Magnetfeldes der Sonnenoberfläche entwickelt sich in einem 11- bzw. 22-jährigen Aktivitätszyklus. Aber die vielen verschiedenen, vom Magnetfeld mittelbar und unmittelbar beeinflussten Prozesse und Erscheinungsformen besitzen Entwicklungszeiten auf weitaus kleineren Zeitskalen, die bis hinab zu wenigen Minuten gehen. Neuer magnetischer Fluss wird kontinuierlich im Sonneninneren erzeugt. Bipolare magnetische Regionen sind die auffälligste Erscheinungsform, wenn dieser Fluss die Sonnenoberfläche erreicht. Dabei können größere Flusskonzentrationen den konvektiven Energietransport so effizient unterdrücken, dass es zu den typischen Erscheinungsformen von Sonnenflecken kommt. Aber Magnetfelder sind nicht ausschließlich begrenzt auf bipolare magnetische Regionen bzw. auf aktive Gebiete, deren Häufigkeit und Konzentration mit dem Aktivitätszyklus einhergeht, vielmehr sind sie allgegenwärtig auf der Sonne. Diese Gebiete werden oft als ruhige Gebiete beschrieben, da deren magnetischer Charakter sich oftmals erst durch sehr genaue und sorgfältige Beobachtung zu erkennen gibt. Sowohl in aktiven als auch in den sogenannten ruhigen Gebieten wird das Magnetfeld durch die *Granulation* und *Supergranulation* in bestimmte charakteristische Zellenmuster organisiert. Die Eigenschaften der Granulation und Supergranulation haben ihren Ursprung in der konvektiven Bewegung des Plasmas. Diese werden ausgelöst in den konvektiv instabilen Schichten in der Wasserstoff-Konvektionszone und reichen hinauf bis in die unteren und mittleren Höhen der Photosphäre (overshoot), um dort die charakteristischen Zellenmuster zu bilden. Wegen der hohen elektrischen Leitfähigkeit des solaren Plasmas sind die magnetischen Feldlinien *eingefroren* und folgen weitgehend passiv der in der Photosphäre sich ausbildenden horizontalen Bewegung des Plasmas. Dies führt zu einer vermehrten Konzentration von magnetischen Fluss an den Grenzen von Supergranulationszellen. Diese Randgebiete mit erhöhtem magnetischen Fluss zeichnen sich ebenfalls durch eine erhöhte Emission aus, die in verschiedenen breitbandigen Filtergrammaufnahmen sichtbar werden und dort zu netzwerkartigen Strukturen führen, so dass diese auch *Netzwerk* genannt werden. Aber es gibt auch deutliche Anzeichen auf ein, wenn auch schwächeres, Magnetfeld innerhalb der Supergranulation selbst, welches dann als *Internetzwerk*-Gebiete bezeichnet wird.

Grundlegende Arbeiten auf dem Gebiet der spektropolarimetrischen Diagnostik von kleinskaligen Magnetfeldern in photosphärischen Netzwerk- und Internetzwerkstrukturen wurden

u.a. von Howard & Stenflo (1972), Frazier & Stenflo (1972) und Stenflo (1973) geleistet. Die erstaunlichen Ergebnisse dieser Arbeiten waren zweifellos die Erkenntnis, dass der Großteil des magnetischen Flusses seinen Ursprung in hochgradig fragmentierten und kleinskaligen magnetischen Strukturen hat. Diese besitzen einen angenommenen Durchmesser von unter 200 km und zeichnen sich darüber hinaus durch eine ungewöhnlich hohe Magnetfeldstärke zwischen 1000 - 2000 Gauß¹ (G) aus. Weiterhin konnte festgestellt werden, dass diese Werte unabhängig davon sind, ob sie in ruhigen oder aktiven Gebieten ermittelt wurden. Diese Resultate führten zu der Modellvorstellung von sogenannten dünnen magnetischen Flussröhren als Grundbausteine der ruhigen und aktiven Sonne. Auch von Seiten der Magnetohydrodynamik gewann diese Vorstellung Unterstützung. Die grundlegenden Arbeiten hierzu wie z.B. von Parker (1976), Spruit (1976), Roberts & Webb (1978), sowie Spruit & Zweibel (1979) bestätigten die theoretische Entstehung, Existenz und auch Stabilität dieser dünnen magnetischen Flussröhren mit angenommenen Durchmessern deutlich jenseits des derzeitigen Auflösungsvermögen moderner Sonnentelkope.

Kleinskalige magnetische Strukturen sind aber nicht nur wesentlicher Bestandteil der Netzwerk- und Internetzwerkgebiete, auch scheinen sie besondere Bedeutung für großskaligen Phänomene wie Sonnenflecken zu haben. Sonnenflecken als Manifestation starker ausgedehnter magnetischer Flussgebiete zeigen die typische dunkle Struktur im Kerngebiet der *Umbra*, mit typischen Durchmessern von ca. 15000 km, welche umgeben ist von der markanten filamentartigen Struktur der *Penumbra*. Hier zeigen gerade neuere hochauflösende Aufnahmen der Penumbra (Scharmer et al., 2002) sehr deutlich die atemberaubende Vielfalt dieser kleinskaligen und filamentartigen Feinstruktur. Auf kleinsten Skalen zeigen sich dabei Intensitäts-, Geschwindigkeits- und Magnetfeldschwankungen. Trotz erheblicher Fortschritte in der Theorie können die bisherigen Modelle der Penumbra noch nicht alle beobachtbaren Eigenschaften erklären (Meyer & Schmidt, 1968; Thomas & Weiss, 1992; Schlichenmeier et al., 1998; Thomas et al. 2002). Den Modellen ist trotz Ihrer Unterschiedlichkeit im Detail, gemeinsam, dass auch hier dünne magnetische Flussröhren, eine zentrale Rolle zu spielen scheinen. Auch von Beobachtungsseite findet die Vorstellung von kleinskaligen magnetischen Flussstrukturen, dank einer immer besseren räumlichen Auflösung, Unterstützung (Solanki & Montavon, 1992; Martinez Pillet, 2000; Sanchez Almeida, 1998; Müller et al., 2002). Obwohl noch vieles über die Natur und Eigenschaft der Penumbra unverstanden ist, zeigt sich, dass sowohl in Theorie als auch Beobachtung, die Tendenz zu immer kleineren magnetischen Strukturen zu gehen scheint, um die Vielzahl von beobachtbaren Phänomenen zu erklären.

1.4 Diagnostik kleinskaliger magnetischer Strukturen

Den Großteil unserer bisherigen Erkenntnis über die magnetische Strukturen in der solaren Photosphäre verdanken wir der Analyse von polarisiertem Licht in bestimmten Spektralbereichen (Spektropolarimetrie). Die durch den Zeeman-Effekt induzierte Polarisation erweiterte die diagnostischen Fähigkeiten der konventionellen Spektraluntersuchung erheblich. Der direkte Zusammenhang zwischen Polarisationsignal im Spektrum und dem Magnetfeld im Entstehungsbereich des Spektrums erlaubt es, Rückschlüsse auf die Ma-

¹1 Gauß = 10^{-4} Tesla. In der Sonnenphysik ist es aus historischen Gründen üblich, die Magnetfeldstärke in Gauß anzugeben.

gnetfeldstruktur zu ziehen. Dem Vermittler dieser Information, dem Strahlungstransport, kommt somit eine Schlüsselfunktion bei der Diagnostik zu.

Die Spektropolarimetrie ist heute das Standardwerkzeug zur Untersuchung magnetischer Strukturen in der Sonnenatmosphäre. Von Bedeutung ist hierfür eine ausreichend hohe spektrale Auflösung, um ein möglichst genaues Polarisationsprofil zu erhalten. Die Form dieses Polarisationssignals enthält wesentliche Informationen über die physikalischen und strukturellen Eigenschaften des Magnetfeldes. Eine Reihe von Methoden und Strategien wurden mit der Zeit entwickelt um physikalisch relevante Informationen aus dem Polarisationspektrum zu extrahieren. Dazu zählen unter anderem Methoden wie die *center-of-gravity*-Technik (Semel, 1967; del Toro Iniesta et al., 1990) sowie die *line-ratio*-Technik (Stenflo, 1973) die maßgeblich zur Aufklärung der kleinskaligen und konzentrierten Natur magnetischer Elemente in der Photosphäre beigetragen hat. Trotz des Erfolges dieser indirekten Methoden war ihre Aussagekraft begrenzt, da sie nur bestimmte Aspekte des Spektrums nutzten.

Noch mehr Information ließ sich durch die sogenannte *Inversion* von Spektropolarimetrischen Beobachtungsdaten gewinnen. Die Inversion ist dabei im engeren Sinne aufzufassen. Hierbei wird das durch den Strahlungstransport inhärent nichtlineare Problem auf ein nichtlineares Ausgleichsproblem zurückgeführt, bei dem ein parametrisiertes theoretisches Modell iterativ an die beobachteten Spektren und Profilverläufe angepasst wird. Diese Methode hatte sehr großen Erfolg bei der Analyse groß- als auch kleinskaliger Magnetfeldstrukturen in der Photosphäre. Wesentliche Arbeiten hierzu wurden u.a. von Auer et al. (1977) und Skumanich & Lites (1987) geleistet. Trotz des Erfolges war ein Nachteil dieser ersten Inversionroutinen, dass sie auf einem vereinfachtem Atmosphärenmodell, dem sogenannten *Milne-Eddington*-Modell, beruhten. Dies erlaubt zwar eine analytische Lösung der Strahlungstransportgleichung und somit auch eine schnelle Berechnung der benötigten Ableitungen nach den atmosphärischen Parametern, jedoch besteht der Nachteil darin, dass die Atmosphäre als homogen betrachtet wird, also keine Höhenabhängigkeit in den meisten atmosphärischen Parametern aufweist. Somit waren diese Inversionsmethoden nicht in der Lage, in adäquater Weise die Struktur einer mit Gradienten behafteten Atmosphäre zu reproduzieren. Inversionsroutinen, die auf der Basis der allgemeineren numerischen Lösung (Landi Degl’Innocenti, 1976) arbeiteten und die benötigten Ableitungen ebenfalls numerisch oder aber mit Hilfe von sogenannten *Response-Funktionen* berechneten (Landi Degl’Innocenti & Landi Degl’Innocenti, 1977), waren auch in der Lage geschichtete atmosphärische Strukturen zu bestimmen (Ruiz Cobo & del Toro Iniesta, 1992; Bellot Rubio, 1996; Westendorp Plaza et al., 1998; Frutiger, 2001). Der große Erfolg dieser Inversionsroutinen hat zweifellos zu einem enormen Erkenntnisgewinn in den letzten Jahren geführt.

Gemeinsam ist den Inversionsroutinen, die eine Analyse nicht aufgelöster Strukturen erlauben, die Modellvorstellung einer Zwei- oder Mehrkomponenten-Atmosphäre. Dabei wird im einfachsten Zweikomponenten-Modell die Annahme gemacht, dass sich in dem räumlichen Gebiet der Beobachtung eine magnetische Substruktur befindet, die eingebettet ist in eine nicht magnetische Umgebung. Dabei dient die Vorstellung von magnetisch dünnen Flussröhren als Modell für die magnetischen Substrukturen. Diese Vorgehensweise vermag die Anzahl der freien Parameter durch magnetohydrodynamische Randbedingungen deutlich zu reduzieren und so das Problem in einem überschaubaren Umfang zu halten. Eine natürliche Weiterentwicklung dieses Modells wurde durch das Hinzufügen weiterer magnetischer und unmagnetischer Komponenten mit unterschiedlichen physikalischen Eigen-

schaften erreicht. Die Vorstellung der Zwei- oder Mehrkomponenten-Atmosphäre erweist sich gerade bei der indirekten Erschliessung von Informationen aus unaufgelösten magnetischen Strukturen als besonders hilfreich. Denn während die unpolarisierte Strahlung im Spektrum ihren Beitrag sowohl aus den magnetischen als auch den unmagnetischen Entstehungsbereichen erfährt, erhalten die polarisierten Anteile des Spektrums ihren Beitrag fast ausschließlich aus den magnetischen Gebieten.

Aus der Sicht des planparallelen Strahlungstransports ist durch die hohe Strukturierung der Atmosphäre, welche durch das Mehrkomponentenmodell im Entstehungsgebiet der Spektralline modelliert wird, die Annahme einer planparallel geschichteten Atmosphäre sicherlich eine nur sehr unzureichende Annahme. Dennoch hat sich bei der Inversion von beobachteten polarimetrischen Daten, die Modellannahme des sogenannten *1.5-dimensionalen* Strahlungstransports bewährt (Stenflo, 1994). Dabei wird auf der Basis des eindimensionalen planparallelen Strahlungstransports einer vorhandenen Strukturierung der Atmosphäre durch magnetische und unmagnetische Komponenten in der Art und Weise Rechnung getragen, dass jeder Sehstrahl entlang der Sichtlinie seine eigene eindimensionale Atmosphäre besitzt. So muß für jeden Sehstrahl nur der eindimensionale Strahlungstransport gelöst werden. Die Geometrie der gesamten unaufgelösten Struktur wird dann durch eine geeignete Mittelung verschiedener Sichtlinien erreicht. Im Gegensatz dazu muß beim multidimensionalen Strahlungstransport durch nichtlokale Effekte, die gesamte geometrische Struktur bereits während der Lösung des Strahlungstransports berücksichtigt werden, was zu einem erheblichen Mehraufwand bei der Berechnung führt. Die Rechtfertigung bezüglich des 1.5-dimensionalen Strahlungstransports ist durch die Tatsache gegeben, dass viele der zur Untersuchung benutzten Spektrallinien unter Bedingungen entstehen, die eine Vernachlässigung der Streuung und somit nichtlokaler Effekte erlauben, sodass eine Berücksichtigung der Strukturierung in Form eines 1.5-dimensionalen Strahlungstransports eine zulässige Approximation darstellt. Stenholm & Stenflo (1978) haben gezeigt, dass dieser 1.5-dimensionalen Strahlungstransport in der Photosphäre und in der Region des Temperaturminimums nur zu kleineren Abweichungen gegenüber dem multidimensionalen Strahlungstransport führt und den erheblichen Mehraufwand nicht rechtfertigen (Stenflo, 1994).

Von besonderer Bedeutung für die Interpretation von kleinskaligen magnetischen Strukturen war in den letzten Jahren die Berücksichtigung der Asymmetrien der Polarisationsprofile. Die gemessenen Polarisationsprofile bzw. *Stokes-Profile*, die im folgenden Kapitel 2 vorgestellt werden, zeigen fast in der gesamten Photosphäre diese typischen Asymmetrien (Sigwarth, 2001). Der polarisierte Strahlungstransport in Form der Unno-Rachkovsky-Gleichung, der die physikalischen Parameter der Atmosphäre mit den gemessenen Stokes-Profilen verbindet, hat wohldefinierte Symmetrieeigenschaften. Die Symmetrie bzw. Antisymmetrie der Stokes-Profile wird in erster Ordnung durch ein inhomogenes Geschwindigkeits- und Magnetfeld entlang der Sichtlinie gebrochen (Landi degl’Innocenti & Landolfi, 1983; Lopez Ariste, 2002). Um theoretische Stokes-Profile an gemessene Profilverläufe anzupassen wird in der Regel ein Geschwindigkeitsgradient sowie ein zusätzlicher Magnetfeldgradient zur Verstärkung der Effekte benötigt (Solanki & Pahlke, 1988). Die Annahmen von Gradienten in der Atmosphäre ist theoretisch sehr plausibel, dennoch scheinen die benötigten Gradienten für die Anpassung der theoretischen Modelle an die beobachteten Stokes-Profile, in vielen Fällen weitgehend unphysikalischen Szenarien zu entsprechen (Sanchez Almeida et al., 1988). Kompliziertere atmosphärische Strukturen auf der Basis von dünnen magnetischen Flussröhren (Bunte et al., 1993; Bellot Rubio,

2000; Steiner, 2000; Frutiger & Solanki, 2001) bieten zwar physikalisch realistischere Rahmenbedingungen, haben aber dennoch Probleme, alle möglichen Erscheinungsformen von asymmetrischen Stokes-Profilen zu erzeugen. Weiterhin sind diese Szenarien auf der Basis von Flussröhren-Modellen mit angenommenen Durchmessern von 100 oder mehr Kilometern im Zusammenhang mit einem multidimensionalen oder 1.5-Dimensionalen Strahlungstransport äußerst modellabhängig, da die Geometrie der Flussröhre bezüglich der Sichtlinie direkten Einfluss auf das Ergebnis hat.

Einen vielbeachteten Vorstoß zur Erklärung der häufig und vielfältig beobachteten Asymmetrien der Stokes-Profilen in der Photosphäre gaben Sanchez Almeida et al. (1996). Darin postulieren sie die Existenz einer kleinskaligen magnetischen Strukturierung auf Skalen weit unterhalb der mittleren freien Weglänge in der Photosphäre. Diese Hypothese der *Micro-Structured-Magnetic-Atmosphere (MISMA)* ist in der Lage, fast jede Art von Asymmetrie der Stokes-Profile zu erklären (Sanchez Almeida, 1997; Sanchez Almeida & Lites, 2000). Die MISMA-Hypothese fand aber nicht nur durch Beobachtungsmaterial Bestätigung, sondern auch durch theoretische Aspekte. Dazu zählen eine Reihe von theoretischen Abschätzungen über die Ausdehnung von Grenzschichten bzw. der Mindestgröße von dünnen magnetischen Flussröhren, die eine untere Grenze von wenigen Kilometern für deren horizontale Ausdehnung zulassen (Schüssler, 1986). Weiterhin legen Annahmen über einen von den granularen Geschwindigkeitsfeldern getriebenen lokal operierenden Dynamo in der Photosphäre die Existenz von kleinskaligen Magnetfeldern nahe (Cattaneo, 1999; Emonet & Cattaneo, 2001). Diese teilweise auch turbulente Strukturierung läßt sich mit den in der MISMA-Hypothese gemachten Annahmen gut in Einklang bringen (Sanchez Almeida, Emonet & Cattaneo, 2003). Auch die bis dahin bestehenden Schwierigkeiten bei der Beschreibung der Entstehung von optisch dünnen Flusstrukturen in der Photosphäre mit Magnetfeldstärken im Bereich von 1-2 kG konnten gelöst werden. Optisch dünne Flussröhren ermöglichen durch ihre mangelnde thermische Abschirmung zwar nicht die Verstärkung eines vorhandenen Subkilogauss-Feldes durch die Modellannahme des *konvektiven Kollapses* (Webb & Roberts 1978; Spruit & Zwiebel, 1979), jedoch konnte Sanchez Almeida (2001) mit der sogenannten *thermische Relaxation* einen Entstehungsmechanismus beschreiben, der es auch optisch dünnen Strukturen erlaubt, in der Photosphäre eine Magnetfeldstärke aufzubauen die in der Größenordnung von 1-2 kG liegt.

Einer der Vorteile des Strahlungstransports unter der Annahme einer Mikrostrukturierung ist die Beschreibung durch statistische Mittel. Anstatt eine feste Anzahl von magnetisch und unmagnetischen Komponenten in Form von gerade ausgerichteten Flussröhren zugrunde zu legen, erlaubt dieser flexiblere Ansatz im Prinzip die Beschreibung über kontinuierliche bzw. diskrete Verteilungsfunktionen. Doch trotz der Erfolge bei der Reproduktion beobachteter Profile besitzt der stochastische Ansatz bei der Beschreibung des Strahlungstransports unter der MISMA-Hypothese deutliche Schwachpunkte. Dazu zählen insbesondere die Annahme der Mikrostrukturierung der atmosphärischen Elemente, welche gleichbedeutend ist mit der statistischen Unabhängigkeit dieser Strukturen untereinander. Dies hat zur Folge, dass jede Art der Korrelation, also die Ausdehnung der individuellen magnetischen Elemente beim Strahlungstransport, vollständig vernachlässigt wird. Dies findet wiederum in der Beschreibung des polarisierten Strahlungstransports derart seinen Ausdruck, dass sowohl die Absorptionsmatrix als auch die Quellfunktion durch ihre räumlichen Mittelwerte ausgedrückt werden, ähnlich der mikroturbulenten Beschreibung von Geschwindigkeitsfeldern. Technisch gesprochen wird hier also erst eine räumliche Mittelung durchgeführt, noch *bevor* die Strahlungstransportgleichung aufintegriert wird. Ein weiterer

Schwachpunkt ist, dass die so erzielte Vereinfachung nur für sehr kleine Strukturen gültig ist, die eine *vernachlässigbare Absorptionsfähigkeit* entlang der Sichtlinie besitzen. Das bedeutet nicht nur, dass diese Annahme sehr von der zugrundeliegenden Geometrie zwischen Sichtlinie und den magnetischen Strukturen abhängt, es verlangt zudem, dass schwach oder gänzlich unmagnetische Strukturen entlang der Sichtlinie ebenfalls schwach absorbierend sein müssen, da sie mit in den räumlichen Mittelungsprozess einbezogen werden. Ein mikrostrukturierter Ansatz wie bei Sanchez Almeida & Lites (2000) erlaubt somit, für kleine magnetische Füllfaktoren, keine korrekte Behandlung des Strahlungstransports.

Sowohl die Linienentstehung auf der Basis konventioneller Flussröhrenmodelle als auch die Linienentstehung unter der MISMA-Hypothese stellen zwei extreme Sichtweisen dar. Beim konventionellen Flusseröhrenmodell wird die Atmosphäre durch eine feste Zahl von unflexiblen Makrostrukturen modelliert. Dadurch ist der Linienentstehungsprozess stark von der Geometrie des Modells und der Sichtlinie abhängig. Insbesondere bei starken dynamischen Prozessen in der Atmosphäre lässt sich so keine sichere Interpretation der Beobachtungen erzielen. Auf der anderen Seite bietet die MISMA-Hypothese zwar eine Möglichkeit, sehr kleinskalige Strukturen zu untersuchen, aber schon die Präsenz einer inhomogenen Mischung von Strukturen verschiedenster Ausdehnungen und/oder Dichten erlaubt keine angemessene Beschreibung des Linienentstehungsprozesses.

In dieser Arbeit soll der stochastische Ansatz zur Beschreibung der atmosphärischen Strukturen konsequent verallgemeinert werden, um so eine Brücke zwischen mikro- und makrostrukturierter Beschreibung zu schlagen. Die Charakterisierung der atmosphärischen Verhältnisse mit Hilfe eines stochastischen Prozesses führt durch die Kopplung der atmosphärischen Parameter mit den Intensitätszuständen der polarisierten Strahlung direkt zu einem stochastischen Strahlungstransport für polarisiertes Licht. Durch die stochastische Beschreibung des Strahlungstransports wird es möglich sein, auf mathematisch korrekte Weise, die variable und endliche Ausdehnung der Strukturelemente einer Atmosphäre zu berücksichtigen.

Kapitel 2

Der polarisierte Strahlungstransport

Im diesem Kapitel soll der grundlegende Mechanismus der Lichtausbreitung in einer planparallelen Atmosphäre in Gegenwart eines Magnetfeldes beschrieben werden. Zunächst wird kurz auf die Annahme des lokalen thermischen Gleichgewichts eingegangen. Danach wird der Zeeman-Effekts beschrieben, der für die Aufspaltung der Spektrallinien und der Generierung von polarisiertem Licht verantwortlich ist. Folgend wird dann der Stokes-Vektor als effiziente und kompakte Beschreibung des polarisierten Lichts eingeführt. Anschliessend wird der Strahlungstransport entlang eines Sehstrahls beschrieben. Dazu soll zunächst die skalare Transportgleichung formuliert werden, um dann mit Hilfe des Stokes-Vektors den Lichttransport in der Gegenwart eines Magnetfeldes zu beschreiben.

2.1 Lokales Thermisches Gleichgewicht

Eine der wesentlichen Voraussetzungen und Vereinfachungen für die folgende Beschreibung des Strahlungstransports ist die Annahme des lokalen thermischen Gleichgewichts (local thermodynamic equilibrium, LTE). Man spricht vom thermischen Gleichgewicht eines Gases, wenn der thermodynamische Zustand räumlich und zeitlich im gesamten Volumen durch einen Parameter, die Temperatur, gegeben ist. Da keine lokalen Abweichungen auftreten, wird in jedem Volumenelement gerade soviel Strahlung absorbiert wie auch emittiert. Da in Sternenatmosphären ein ständig nach außen gerichteter Netto-Strahlungsstrom existiert, ist die Annahme des thermodynamischen Gleichgewichts zwar global für die gesamte Atmosphäre nicht gültig, jedoch kann sie für kleine Volumenelemente innerhalb der Atmosphäre, dort wo die Dichten hoch genug sind und stoßinduzierte Übergänge dominieren, eine sinnvolle Näherung sein. Eine der wesentlichen Vereinfachungen, die unter der Annahme von LTE angewandt werden können, ist, dass sich die Emission durch die *Kirchhoff-Planck-Funktion* beschreiben lässt,

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT} - 1)}, \quad (2.1)$$

und somit allein durch die Temperatur beschrieben werden kann. Die Annahme, dass die Emission allein durch die Temperatur bestimmt wird, setzt natürlich entsprechend

hohe Stossraten voraus. Dies führt auch dazu, dass Absorption- und Emissionsprozess weitgehend voneinander entkoppelt sind. Eine wichtige Beziehung für das Berechnen der jeweiligen Besetzungszahldichten von $(r+1)$ -fach zu r -fach ionisierten Atomen läßt sich unter LTE-Bedingungen durch die Saha-Boltzmann-Gleichung angegeben, die wie folgt lautet

$$\frac{n^{r+1}}{n^r} n_e = 2 \frac{Q^{r+1}}{Q^r} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^2} e^{\chi_r/kT} . \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet Q^{r+1} und Q^r die Zustandssummen des $(r+1)$ -fach und r -fach ionisierten Atoms, χ_r die Ionisationsenergie des r -fach ionisierten Atoms und n_e die Elektronendichte. Mit der Annahme des lokalen thermischen Gleichgewichts läßt sich weiterhin das Besetzungszahlverhältnis zweier Niveaus n_i und n_{i+1} mit der Energiedifferenz ΔE durch die *Boltzmann-Gleichung* beschreiben:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{g_{i+1}}{g_i} e^{-\Delta E/kT} , \quad (2.3)$$

wobei g_i und g_{i+1} die statistischen Gewichte des i -ten bzw. $(i+1)$ -ten Energieniveaus sind. Weitaus komplizierter stellt sich der Fall des nicht lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (non-local thermodynamic equilibrium, NLTE) dar. Dort, wo durch abnehmende Dichte Streuprozesse wirksam werden und anstelle der stoßinduzierten Übergänge strahlungsinduzierte Übergänge mehr und mehr an Bedeutung gewinnen, haben Gleichung (2.3) und (2.1) keine Gültigkeit mehr. Die Besetzungszahlen und die Reemission werden dann durch das Strahlungsfeld selbst mitbestimmt und führen so zu einer komplizierten nicht-lokalen und nichtlinearen Kopplung der Transportgleichung.

2.2 Der Zeeman-Effekt

Die Aufspaltung von Spektrallinien unter dem Einfluss von Magnetfeldern ist seit dem Jahre 1896 dokumentiert und bekannt, als Pieter Zeeman im Labor die Verbreiterung und Polarisation der Natrium-D-Linien untersuchte und richtig interpretierte. Eine erste klassische Erklärung dieses Phänomens erfolgte bereits kurz danach durch Lorentz, jedoch dauerte es bis zum Jahr 1916, als Debye und Sommerfeld und dann etwas später 1918 Bohr eine allgemeinere quantenmechanische Erklärung dieses Effektes lieferten.

Zunächst betrachtet man den Hamiltonoperator H eines Atoms in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}$. Durch die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Atoms und dem äußeren Feld erhält man zusätzlich zum ungestörten Operator H_0 in erster Ordnung Störungsrechnung einen Beitrag H_1 , sodass man für H

$$H = H_0 + H_1 = H_0 + \frac{e}{2m_e c} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \mathbf{B} \quad (2.4)$$

erhält. Dabei sind e die Elementarladung des Elektrons mit der Masse m_e und c die Lichtgeschwindigkeit. $\mathbf{L}$ ist der Operator des Bahndrehimpulses, dessen Quadrat die Eigenwerte $\hbar^2 L(L+1)$ (mit $L = 0, 1, 2, \dots$) besitzt, $\mathbf{S}$ der Spinoperator, dessen Quadrat die Eigenwerte $\hbar^2 S(S+1)$ (mit $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$) hat, und $\mathbf{B}$ ist das äußere Magnetfeld. Hierbei

wurde die Gültigkeit der Russel-Saunders-Kopplung (LS-Kopplung) angenommen. Weiterhin wird hierbei angenommen, dass das magnetische Moment des Kerns vernachlässigt werden kann und die Kopplung des Atoms an das äußere Feld schwach im Vergleich zur Spin-Bahn-Kopplung ist. Letztere Annahme ist für die hier betrachteten Spektrallinien und für die auf der Sonne beobachteten Magnetfeldstärken gewährleistet. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Störungstheorie erster Ordnung erfüllt, die das Ergebnis liefert, dass durch das äußere Feld die $(2J + 1)$ -fache Entartung der Energieniveaus aufgehoben wird. Dabei ist J die Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Wählt man die Quantisierungsachse z so, dass sie in Richtung des Magnetfeldes zeigt, ist die Energie der einzelnen Niveaus gegeben durch

$$E_{J,M} = E_J + \mu_0 g M B . \quad (2.5)$$

Hierbei ist E_J die Energie eines Niveaus ohne äußeres Feld (E_J ist Eigenwert von H_0), $\hbar M$ (mit $M = -J, -J + 1, \dots, +J$) ist Eigenwert von J_z , der Drehimpulskomponente in Richtung des Magnetfeldes, $\mu_0 = e\hbar/2m_e c$ ist das Bohrsche Magneton, $B = |\mathbf{B}| = B_z$, und g ist der Landé-Faktor. Im Falle der L-S-Kopplung kann der Landé-Faktor geschrieben werden als

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} . \quad (2.6)$$

Historisch bedingt wird eine Unterscheidung zwischen normalem und anomalem Zeeman-Effekt getroffen. Der normale Zeeman-Effekt tritt im allgemeinen bei Übergängen zwischen Niveaus mit gleichem Landé-Faktor auf oder wenn ein Niveau mit $J = 0$ beteiligt ist. Den möglichen Übergängen liegt die Auswahlregel $\Delta L = \pm 1$ für elektromagnetische Dipolstrahlung zugrunde. Dies hat zur Folge, dass die Auswahlregel für die Projektion M des Gesamtdrehimpulses auf die Quantisierungsachse gegeben ist durch

$$\Delta M = 0, \pm 1 , \quad (2.7)$$

mit der Bedingung, dass $M = 0 \rightarrow M = 0$ nur gilt, falls $\Delta J \neq 0$. Dies wiederum bewirkt, dass die Spektrallinie in drei Komponenten mit den Frequenzen ν_0 und $\nu_0 \pm \mu g B$ aufspaltet. Der unverschobene Anteil ($\Delta M = 0$) wird als π -Komponente bezeichnet, die verschobenen Anteile ($\Delta M = \pm 1$) als $\sigma^\pm$ -Komponenten. Die ($\Delta M = +1$)-Komponente ist blau-, die ($\Delta M = -1$)-Komponente rotverschoben. Im Falle eines Übergangs mit einer Beteiligung eines $J = 0$ -Niveaus ist es offensichtlich, dass die Linie in genau drei Komponenten aufspaltet. In diesem Fall ist der Landé-Faktor der Linie mit dem Landé-Faktor des $J = 1$ -Niveaus identisch. Im allgemeinen Fall - welches im eigentlichen Sinne den Normalfall darstellt - haben oberes und unteres Niveau verschiedene Landé-Faktoren, und die Spektrallinie hat i.a. mehr als drei Komponenten. Dies wird als anomaler Zeeman-Effekt bezeichnet. Bezeichnet man die Landé-Faktoren des unteren und des oberen Niveaus mit $g_l(lower)$ bzw. $g_u(upper)$, erhält man jetzt für die Energieniveaus mit ansonsten gleichen Bezeichnungen wie in Gleichung (2.5)

$$E_{J,M_u,M_l} = E_J + \mu_0 (g_u M_u - g_l M_l) B . \quad (2.8)$$

Man kann auch für Linien, die einen anomalen Zeeman-Effekt zeigen, eine Unterscheidung zwischen σ - und π -Komponenten treffen, wenn man analog zum Landé-Faktor bzw. g -Faktor für ein normales Zeemna-Trplett einen effektiven Landé-Faktor einführt (Beckers, 1969)

$$g_{eff} = \frac{1}{2}(g_l + g_u) + \frac{1}{4}(g_l - g_u)(J_l(J_l + 1) - J_u(J_u + 1)) \quad (2.9)$$

Der effektive Landé-Faktor ist ein Maß für die Wellenlängenverschiebung des Schwerpunktes der σ - und π -Komponenten relativ zur Frequenz ν_0 bzw. Wellenlänge λ_0 der unverschobenen Linie. Es ist hierbei anzumerken, dass die letzte Gleichung symmetrisch bezüglich des Austausches von oberen und unteren Niveau ist und auch für den normalen Zeeman-Effekt gültig ist (wenn für $J = 0$, $g = 0$ gesetzt wird).

Aus der Gleichung (2.5) folgt für die Wellenlängenaufspaltung $\Delta\lambda_B$ der einzelnen Komponenten durch den Zeeman-Effekt

$$\Delta\lambda_B = \frac{e}{4\pi m_e c} g B \lambda_0^2. \quad (2.10)$$

Im cgs-System gilt $\Delta\lambda_B = 4.67 \cdot 10^{-11} g B \lambda_0^2$ (λ [cm], B [Gauss]).

Aufgrund der Kopplung der Dipolstrahlung mit dem Drehimpuls L der beteiligten Übergänge und den entsprechenden Auswahlregeln, zeigen die Zeeman-Komponenten in Abhängigkeit der Quantisierungsachse des Magnetfeldes ganz bestimmte Polarisationsseigenschaften. Bei Beobachtung parallel zum Magnetfeld sind nur die beiden σ -Komponenten sichtbar, welche entgegengesetzt zirkulare Polarisation zeigen (*longitudinaler* Zeeman-Effekt). Bei Beobachtung senkrecht zum Magnetfeld, erscheinen alle drei Komponenten mit linearer Polarisation (*transversaler* Zeeman-Effekt). Der allgemeine Fall beliebiger Betrachtungsrichtung zeigt sowohl linear als auch zirkular polarisierte Anteile der σ -Komponenten, also elliptisch polarisiertes Licht. Die π -Komponente verbleibt hingegen aufgrund der Auswahlregel linear polarisiert. Die Stärke der linear sowie der zirkular polarisierten Anteile wird zum einen durch die quantenmechanische Übergangswahrscheinlichkeit und zum anderen durch die geometrische Anordnung von Magnetfeld- und Beobachtungsrichtung bestimmt. Hierauf wird in Abschnitt 2.5 näher eingegangen.

2.3 Die Stokes-Parameter

Zur vollständigen Beschreibung polarisierter Strahlung sind neben der Intensität noch weitere Parameter notwendig. Als besonders nützlich hat sich ein von George Gabriel Stokes im Jahr 1852 definierter Formalismus erwiesen. Die in diesem Formalismus verwendeten Parameter sind direkt mit physikalisch messbaren Größen verknüpft. Damit gelingt es in Verallgemeinerung der Beschreibung des Transports unpolarisierten Lichts, eine kompakte Schreibweise für den polarisierten Strahlungstransport zu erhalten. Ausgangspunkt für die Beschreibung einer elektromagnetischen Welle ist die Darstellung des elektrischen Feldvektors $\mathbf{E}$ in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Dazu betrachtet man eine quasi-monochromatische Welle mit einer mittleren Frequenz ν und der dazugehörigen mittleren Wellenlänge λ . Die spektrale Breite bzw. Unschärfe der Welle sei $\Delta\nu \ll \nu$. Für

den elektrischen Feldvektor einer solchen Welle, die sich in positiver z-Richtung ausbreitet, gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= (\mathcal{E}_x(t)\mathbf{x} + \mathcal{E}_y(t)\mathbf{y})e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{mit} \\ \mathcal{E}_x(t) &= \xi_x(t)e^{-i\phi_x(t)} \quad \text{und} \\ \mathcal{E}_y(t) &= \xi_y(t)e^{-i\phi_y(t)}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Hierbei sind ξ_x und ξ_y die Amplituden, ϕ_x und ϕ_y die Phasen, k die mittlere Wellenzahl und ω die mittlere Kreisfrequenz.

Für jeden Elementarprozeß eines atomaren Überganges stellt die obige Gleichung zwar eine korrekte Beschreibung des Feldvektors dar, jedoch wird im allgemeinen eine sehr große Anzahl statistisch unabhängiger Elementarprozesse bei der Generierung der erzeugten Strahlung beteiligt sein, sodass die Amplituden und Phasen des resultierenden Feldvektors $\mathbf{E}$ in der Regel Zeitabhängig sind und somit selbst keine Observablen darstellen. Diese sind daher für eine operative Beschreibung des Polarisationszustandes nicht geeignet. Aus diesem Grunde führte Stokes ein Satz von vier Parametern ein, die im statistischen Sinne eindeutig den Polarisationszustand beschreiben und die alle die Dimension einer Intensität besitzen. Eine genaue Herleitung dieser Parameter kann u.a. bei Rees (1987) nachgelesen werden. Die vier Parameter besitzen folgende Darstellung

$$\begin{aligned}I &= \langle \xi_x^2 + \xi_y^2 \rangle, \\ Q &= \langle \xi_x^2 - \xi_y^2 \rangle, \\ U &= 2\langle \xi_x \xi_y \cos(\phi_x - \phi_y) \rangle, \\ V &= 2\langle \xi_x \xi_y \sin(\phi_x - \phi_y) \rangle.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Dabei wird durch die spitzen Klammern $\langle \dots \rangle$ der durch die Beobachtung bedingte Mittelungsprozeß zum Ausdruck gebracht, da die Dauer der Messung viel grösser als die Dauer der Elementarprozesse ist. Die anschauliche Bedeutung der vier Stokes-Parameter ist nicht sofort einsichtig, aber durch geeignete Koordinatentransformation (Rees, 1987) läßt sich zeigen, dass

- V der Differenz der Intensitäten von rechts und links zirkular polarisiertem Licht,
- Q der Differenz der Intensitäten von linear polarisiertem Licht unter einem Winkel von 0° und 90° ,
- U der Differenz der Intensitäten von linear polarisiertem Licht unter einem Winkel von 45° und 135° ,
- I der Gesamtintensität

entspricht. Der Bezugspunkt für die Winkelangaben ist zunächst willkürlich und wird in der praktischen Anwendung durch den Versuchsaufbau bestimmt.

Der Polarisationsgrad P der beobachteten elektromagnetischen Strahlung läßt sich durch die Stokes-Parameter sehr anschaulich definieren als Polarisationsgrad

$$P = \sqrt{\frac{Q^2 + U^2 + V^2}{I^2}}.\tag{2.13}$$

Hier wird sofort ersichtlich, dass für vollständig polarisiertes Licht

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (2.14)$$

gilt.

Der Polarisationszustand der elektromagnetischen Strahlung lässt sich in kompakter Schreibweise als *Stokes-Vektor* zusammenfassen

$$\mathbf{I} = (I, Q, U, V)^T, \quad (2.15)$$

dabei bezeichnet T den transponierten Vektor. Hierbei soll angemerkt werden, dass es sich im mathematischen Sinne nicht um einen Vektor handelt, da die Stokes-Parameter in der Regel nicht die Elemente eines Vektorraumes bilden.

2.4 Der skalare Strahlungstransport

Eine grundlegende Größe in der Theorie des Strahlungstransports ist die Intensität I eines Strahlungsfeldes. Die Änderung der monochromatischen Strahlungsintensität I_ν entlang des Weges s lässt sich auf die drei Elementarprozesse spontane Emission, induzierte Emission und Absorption in einem 2-Niveau-System zurückführen (Mihalas, 1978),

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} ((-B_{12}n_1\Phi_\nu + B_{21}n_2\Psi_\nu N)I_\nu + A_{21}n_2\Psi_\nu). \quad (2.16)$$

Dabei sind A_{21} und B_{21} die Einsteinkoeffizienten für die spontane bzw. induzierte Emission, B_{12} der Einsteinkoeffizient für die Absorption zwischen dem unteren Niveau 1 und dem oberen Niveau 2. Weiterhin sind n_1 und n_2 die Besetzungszahlen des unteren bzw. oberen Niveaus und Φ_ν und Ψ_ν sind die Absorptions- bzw. Emissionsprofilfunktionen. Für die Einsteinkoeffizienten gelten die Relationen

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \quad \text{und} \quad \frac{A_{12}}{B_{21}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}, \quad (2.17)$$

wobei g_1 und g_2 die statistischen Gewichte des unteren bzw. oberen Niveaus sind. Das Verhältnis der Besetzungszahlen n_2 und n_1 ist gemäss der Boltzmann-Statistik durch Gleichung 2.3 gegeben.

Aufgrund der Annahme von LTE und der damit verbundenen Dominanz von stoßinduzierten Vorgängen sind Absorption und Emission weitgehend voneinander entkoppelt, und für die Profilfunktionen gilt $\Phi_\nu = \Psi_\nu$ (Stenflo, 1994). Spontane Emission begrenzt die Lebensdauer des angeregten Zustandes, was entsprechend der Unschärferelation eine Unschärfe in der Energie zur Folge hat. Daraus resultiert eine statistische Verbreiterung des Absorptions- bzw. Emissionsprofils. Dieser Verbreiterungsmechanismus wird Strahlungsdämpfung genannt, und die entstehende Verbreiterung als natürliche Linienbreite bezeichnet. Die resultierende Profilfunktion (*Lorentz-Profil*) ist wie folgt definiert:

$$\Psi_N(\Delta\nu) = \frac{\Gamma_N}{(2\pi\Delta\nu)^2 + \Gamma_N^2/4}, \quad (2.18)$$

wobei Γ_N der Dämpfungsterm ist und $\Gamma_N/2\pi$ die Halbwertsbreite des Profils bestimmt. Weiterhin ist $\Delta\nu$ die Frequenzverschiebung. In der Sonnenatmosphäre ist die natürliche Linienverbreiterung klein gegenüber der *Stoss- oder Druckverbreiterung*. Diese resultiert aus der Kollision des angeregten Atoms mit anderen Teilchen, bei der ein Teil der Energie des angeregten Atoms auf den Stoßpartner übertragen und die Lebensdauer des angeregten Zustands verkürzt wird. Die dominierenden Beiträge zur Stoßverbreiterung in der Photosphäre sind Stöße mit neutralem Wasserstoff (*Van-der-Waals-Verbreiterung*) und mit Elektronen (*Stark-Verbreiterung*). Die Frequenzabhängigkeit ist auch bei diesen Verbreiterungsmechanismen durch ein Lorentz-Profil gegeben. Die Faltung der verschiedenen Beiträge liefert die Profilsfunktion $\Psi_{D\ddot{a}m}$ der Gesamtdämpfung, welche wiederum einem Lorentz-Profil entspricht. Gemäß der Faltungsoperation setzt sich der resultierende Dämpfungsterm $\Gamma_{D\ddot{a}m}$ nun additiv aus den Dämpfungstermen der natürlichen Linienverbreiterung Γ_N , der Van-der-Waals-Verbreiterung Γ_{VdW} und der Stark-Verbreiterung Γ_{St} zusammen zu, $\Gamma_{D\ddot{a}m} = \Gamma_N + \Gamma_{VdW} + \Gamma_{St}$.

In einem Ensemble von Atomen besitzt jedes einzelne eine Geschwindigkeitskomponente ξ entlang der Sichtlinie des Beobachters, sodass zusätzlich zu den genannten Verbreiterungsmechanismen eine *Doppler-Verbreiterung* durch die unkorrelierte Überlagerung der Eigenbewegungen auftritt. Mit der Annahme des LTE genügen die Geschwindigkeiten einer Maxwell-Verteilung, nach der für die Wahrscheinlichkeit, ein Atom mit der Sichtliniengeschwindigkeit ξ im Intervall $(\xi, \xi + d\xi)$ anzutreffen, gilt

$$W(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi_0} e^{-\xi^2/\xi_0^2} d\xi. \quad (2.19)$$

Dabei ist $\xi_0 = \sqrt{2kT/m_A}$ die wahrscheinlichste Geschwindigkeit bei der Temperatur T und der atomaren Masse m_A . Mit der Annahme $\xi_0 \ll c$ und der Definition für die Doppler-Breite

$$\Delta\nu_D \equiv \nu_0 \xi_0 / c, \quad (2.20)$$

führt das zu einer Doppler-Verbreiterung mit dem Profil

$$\Psi_D(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp -(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2. \quad (2.21)$$

Die resultierende Profilsfunktion aus Dämpfung und Doppler-Verbreiterung erhält man nun durch die Faltung der beiden Profile $\Psi_{D\ddot{a}m}$ und Ψ_D , woraus sich folgende Profilsform ergibt

$$\Psi(\nu) = \frac{\Gamma}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2}}{2\pi(\nu - \nu_0 - \Delta\nu)^2 + \Gamma^2/4} d(\Delta\nu). \quad (2.22)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} y &= \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}, \\ a &= \frac{\Gamma_{D\ddot{a}m}}{4\pi\Delta\nu_D}, \\ v &= \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

erhält man

$$\Psi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} H(v, a) . \quad (2.24)$$

Dabei ist das Resultat der Faltung aus Lorentz-Profil und Gauss-Profil durch die *Voigt-Funktion* $H(v, a)$ mit

$$H(v, a) \equiv \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(v - y)^2 + a^2} , \quad (2.25)$$

gegeben, welche die typische Form einer atomaren Spektrallinie ohne Sättigungseffekte beschreibt.

Um nun noch neben der Profilform auch die Stärke der Absorptions und Emmissionsprozesse zu beschreiben wird die Gleichung (2.16) in folgende Form gebracht

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \kappa_l \Psi_\nu I_\nu + j_\nu^l = \kappa_l \Psi_\nu (I_\nu - S_\nu^l) . \quad (2.26)$$

Dabei sind κ_l der Linienabsorptionskoeffizient, j_ν^l der Linienemissionskoeffizient und S_ν^l die Linienquellfunktion, welche der Beziehung $j_\nu^l = \kappa_l \Psi_\nu S_\nu^l$ genügt. Entsprechend der Gleichung (2.16) und den Einsteinrelationen (2.17) sind diese gegeben durch

$$\kappa_l = \frac{h\nu}{4\pi} B_{12} n_1 \left(1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} \right) , \quad (2.27)$$

$$j_\nu^l = \frac{h\nu}{4\pi} A_{21} n_2 \Psi_\nu \quad \text{bzw.} \quad S_\nu^l = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} - 1} . \quad (2.28)$$

Der Einsteinkoeffizient B_{12} ist die Übergangswahrscheinlichkeit vom unteren zum oberen atomaren Zustand er entspricht somit dem atomaren Wirkungsquerschnitt der Absorption und hängt nur von den physikalischen Eigenschaften der beiden Zustände ab. Es ist möglich, B_{12} direkt aus quantenmechanischen Rechnungen zu ermitteln, doch ist es üblich und für den allgemeinen Fall genauer, den Wert experimentell zu bestimmen. Damit wird jedem Übergang eine sogenannte Oszillatorenstärke f_{12} zugeordnet, die ein Maß für die Stärke bzw. die Übergangswahrscheinlichkeit ist. Dabei besteht folgende Beziehung:

$$\frac{\pi e^2}{m_e c} f_{12} = \frac{h\nu}{4\pi} B_{12} , \quad (2.29)$$

wobei e die Elementarladung ist und m_e die Masse des Elektrons. Da der Wirkungsquerschnitt und somit auch f_{12} wesentlich durch die Besetzungszahl- und Ionisationsverhältnisse beeinflusst wird, wird unter LTE-Bedingungen die Oszillatorstärke wesentlich durch die Boltzmann-Gleichung und Saha-Gleichung bestimmt und somit durch die Temperatur und den Elektronendruck. Für den Linienabsorptionskoeffizienten läßt sich dann unter LTE-Bedingungen

$$\kappa_l = \frac{\pi e^2}{m_e c} n_1 f_{12} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \quad (2.30)$$

schreiben. Für die Linienquellfunktion ergibt sich mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung (2.3)

$$S_\nu^l = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (2.31)$$

was der Kirchhoff-Planck-Funktion (2.1) entspricht. Übergänge zwischen gebundenen Zuständen haben gemäß der Profilform nur innerhalb eines kleinen Frequenzbereiches Einfluß auf das Strahlungsfeld. Von Bedeutung für die Strahlungsintensität sind neben den bereits diskutierten diskreten Übergängen auch kontinuierliche Absorptions- und Emissionsprozesse. Maßgeblich hierfür sind gebunden-frei- und die frei-frei-Übergänge für die Absorption sowie deren inverse Prozesse für die Emission. Den dominierenden Beitrag an der kontinuierlichen Absorption haben der neutrale und das negative Wasserstoff-Ion. Um den Prozess der kontinuierlichen Absorption und Emissions Rechnung zu tragen werden der zusätzliche kontinuierliche Absorptionskoeffizient κ_c und die kontinuierliche Quellfunktion S_ν^c eingeführt. Für die kontinuierliche Absorption bzw. Emission gelten im wesentlichen die Bedingungen des lokalen thermischen Gleichgewichts, da diese Strahlung überwiegend aus den unteren Schichten der Photosphäre stammt. Die Strahlungstransportgleichung (2.26) nimmt somit folgende Form an:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = (\kappa_c + \kappa_l \Psi_\nu)(I_\nu - B_\nu(T)). \quad (2.32)$$

2.5 Der Strahlungstransport im Magnetfeld

In der Gegenwart eines Magnetfeldes ist es nun aufgrund der durch den Zeeman-Effekt induzierten Aufspaltung und Polarisierung von besonderem Interesse, nicht nur die Strahlungsintensitäten allein zu betrachten, sondern auch dessen Polarisationszustand. Mit Hilfe des Stokes-Vektors gelingt es, eine Gleichung analog zur skalaren Differentialgleichung (2.32) zu formulieren. Diese lautete gemäß Landi Degl'Innocenti und Landi Degl'Innocenti (1972)

$$\frac{d\mathbf{I}_\nu}{ds} = -\mathbf{K}_\nu \mathbf{I}_\nu + \mathbf{j}_\nu \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\mathbf{I}_\nu}{ds} = -\mathbf{K}_\nu (\mathbf{I}_\nu + \mathbf{S}_\nu), \quad (2.33)$$

und bildet ein gekoppeltes lineares Differentialgleichungssystem, wobei s wiederum den geometrischen Weg entlang der Sichtlinie beschreibt. Im folgenden soll auf die Frequenzindizes der Übersichtlichkeit halber verzichtet werden. Der Absorptionskoeffizient aus Abschnitt 2.4 wird nun ersetzt durch $\mathbf{K} = K_{ij}$, der totalen Absorptionsmatrix, welche gegeben ist durch

$$\mathbf{K} = \kappa_c \mathbf{1} + \kappa_l \hat{\Psi}, \quad (2.34)$$

und die Emission wird ersetzt durch $\mathbf{j}$, dem totalen Emissionsvektor, gegeben durch

$$\mathbf{j} = \kappa_c S_c \mathbf{e}_0 + \kappa_l S_l \hat{\Psi} \mathbf{e}_0. \quad (2.35)$$

Dabei sind $\mathbf{1}$ die 4×4 Einheitsmatrix und $\mathbf{e}_0$ der Einheitsvektor. Die Linienprofilfunktion Ψ wird nun durch die Linienabsorptionsmatrix $\hat{\Psi}$ ersetzt und ist gegeben durch

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_I & \Psi_Q & \Psi_U & \Psi_V \\ \Psi_Q & \Psi_I & \Psi_V^* & -\Psi_U^* \\ \Psi_U & -\Psi_V^* & \Psi_I & \Psi_Q^* \\ \Psi_V & \Psi_U^* & \Psi_Q^* & \Psi_I \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix kann in drei Komponenten zerlegt werden :

1. einen Diagonalanteil mit Ψ_I -Termen, der die Absorption ungeachtet des Polarisationszustandes beschreibt,
2. einen symmetrischen Anteil, der die Ψ_Q , Ψ_U , und Ψ_V -Terme enthält und die polarisationsabhängige Absorption beschreibt (*Dichroismus*),
3. einem antisymmetrischen Anteil, der die Ψ^* -Terme enthält und die Effekte der *anormalen Dispersion* (*magneto-optische Effekte*) beschreibt.

Für elektromagnetische Dipolübergänge in einem Magnetfeld unter LTE-Bedingungen haben die Einträge die folgende Form

$$\begin{aligned} \Psi_I &= \frac{1}{2} \left(\Psi_p \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} (\Psi_r + \Psi_b) (1 + \cos^2 \gamma) \right), \\ \Psi_Q &= \frac{1}{2} \left(\Psi_p - \frac{1}{2} (\Psi_r + \Psi_b) \right) \sin^2 \gamma \cos 2\phi, \\ \Psi_U &= \frac{1}{2} \left(\Psi_p - \frac{1}{2} (\Psi_r + \Psi_b) \right) \sin^2 \gamma \sin 2\phi, \\ \Psi_V &= \frac{1}{2} (\Psi_r - \Psi_b) \cos \gamma, \\ \Psi_Q^* &= \frac{1}{2} \left(\Psi_p^* - \frac{1}{2} (\Psi_r^* + \Psi_b^*) \right) \sin^2 \gamma \cos 2\phi, \\ \Psi_Q^* &= \frac{1}{2} \left(\Psi_p^* - \frac{1}{2} (\Psi_r^* + \Psi_b^*) \right) \sin^2 \gamma \sin 2\phi, \\ \Psi_V^* &= \frac{1}{2} (\Psi_r^* - \Psi_b^*) \cos \gamma. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Hierbei bezeichnet γ den Inklinationswinkel (Winkel zwischen Sichtlinie und Magnetfeldausrichtung), ϕ das Azimut (Projektion des Magnetfeldes auf die Ebene senkrecht zur Sichtlinie) sowie $\Psi_{p,b,r}$ und $\Psi_{p,b,r}^*$ die verallgemeinerten Profildfunktionen für die Absorption und anomale Dispersion. Man erhält die verallgemeinerten Profildfunktionen als Summen über die Beiträge aller Übergänge, die der Auswahlregel

$$\Delta M = M_u - M_l * \begin{pmatrix} +1 \equiv b \\ 0 \equiv p \\ -1 \equiv r \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

genügen. Dabei ist p die π -Komponente des Zeeman-Tripletts, b die blauverschobene σ -Komponente und r die rotverschobene σ -Komponente. Es gilt dann für die verallgemeinerten Profilkfunktionen mit ($q = 0, \pm 1$)

$$\Psi_q = \sum_{M_u} S_q(M_l, M_u) H(v_q - v_A, a), \quad (2.38)$$

$$\Psi_q^* = \sum_{M_u} S_q(M_l, M_u) F(v_q - v_A, a). \quad (2.39)$$

Dabei sind $M_l = M_u + q$ und $v_q = v + v_B(g_u M_u - g_l M_l)$. Die Voigt-Funktion $H(v, a)$ ist durch (2.25) gegeben, $F(v, a)$ wird als Liniendispersionsfunktion oder *Faraday-Voigt-Funktion* bezeichnet und ist definiert durch

$$F(v, a) \equiv \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v - y)e^{-y^2} dy}{(v - y)^2 + a^2}. \quad (2.40)$$

Die Faraday-Voigt Funktion ist antisymmetrisch bezüglich v , während die Voigt-Funktion symmetrisch ist. Die Definition der Parameter y , a und v entspricht der in (2.24) getroffenen Vereinbarung. Die Parameter v_A und v_B entsprechen der Doppler-Verschiebung und der Zeeman-Aufspaltung. In Einheiten der Doppler-Breite sind diese Parameter wie folgt definiert

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_D}, \quad v_A = \frac{\Delta \lambda_A}{\Delta \lambda_D} = \frac{\lambda_0 \xi_A}{\Delta \lambda_D c}, \quad v_B = \frac{\Delta \lambda_B}{\Delta \lambda_D} = \frac{e \lambda_0^2}{4 \pi m_e c^2 \Delta \lambda_D} B. \quad (2.41)$$

S_q , in den Gleichungen (2.38) und (2.39) sind die normierten statistischen Gewichte, die durch das Wigner-Eckart-Theorem gegeben sind

$$S_q(M_l, M_u) = \left(\begin{array}{ccc} J_l & J_u & 1 \\ -M_l & M_u & q \end{array} \right)^2 \quad (2.42)$$

Eine genaue Angabe zu den statistischen Gewichten kann u.a. bei Stenflo (1994) gefunden werden.

2.6 Formale Lösung des polarisierten Strahlungstransports

Zunächst gilt festzustellen, dass eine analytische Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems (2.33), von besonderen Spezialfällen abgesehen (wie z.B. der Milne-Eddington-Atmosphäre), im allgemeinen Fall nicht möglich ist, sodass in der Regel eine numerische Integration der Strahlungstransportgleichung durchzuführen ist. Jedoch kann in Verallgemeinerung zur skalaren Strahlungstransportgleichung eine formale Lösung der Transportgleichung (2.33) angegeben werden (Landi Degl'Innocenti & Landi Degl'Innocenti, 1985). Die Beschreibung der formalen Lösung des polarisierten Strahlungstransports wird auch im weiteren Verlauf der Arbeit von besonderen praktischen Nutzen sein.

Ausgehend von der Strahlungstransportgleichung (2.33),

$$\frac{d\mathbf{I}}{ds} = -\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{S}), \quad (2.43)$$

läßt sich zunächst für den homogenen Fall ein linearer Operator $\mathbf{O}$ einführen (Gantmacher, 1959) der am Punkt s' auf den Stokes-Vektor $\mathbf{I}$ wirkt und diesen in den Stokes-Vektor an der Stelle s transformiert.

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{O}(s, s') \mathbf{I}(s') . \quad (2.44)$$

Dieser als *Evolutions-Operator* bezeichnete Operator $\mathbf{O}(s, s')$ erfüllt die Beziehungen

$$\mathbf{O}(s, s) = \mathbf{1} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{O}(s, s') = \mathbf{O}(s, s'') \mathbf{O}(s'', s') , \quad (2.45)$$

wobei $\mathbf{1}$ die 4×4 Einheitsmatrix ist. Weiterhin erfüllt der Evolutions-Operator folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{O}(s, s') = -\mathbf{K}(s) \mathbf{O}(s, s') . \quad (2.46)$$

So läßt sich unter Ausnutzung obiger Beziehungen zeigen, dass die formale Lösung des homogenen Falls, aber auch des inhomogenen Falls (2.43) mit Hilfe des Evolutions-Operators in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\mathbf{I}(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{O}(s, s') \mathbf{K}(s') \mathbf{S}(s') ds' + \mathbf{O}(s, s_0) \mathbf{I}(s_0) . \quad (2.47)$$

Für eine semi-unendliche Atmosphäre mit $s \rightarrow -\infty$ und $s_0 = 0$ an der Oberfläche läßt sich (2.47) zudem schreiben als

$$\mathbf{I}(0) = \int_{-\infty}^0 \mathbf{O}(0, s) \mathbf{K}(s) \mathbf{S}(s) ds . \quad (2.48)$$

Dies stellt in formaler Analogie zur Lösung der skalaren Strahlungstransportgleichung (Mihalas, 1978) eine Verallgemeinerung für den polarisierten Fall dar. Landi Degl'Innocenti & Landi Degl'Innocenti (1985) zeigen weiter, wie unter bestimmten Voraussetzungen ein analytischer Ausdruck für den Evolutionsoperator hergeleitet werden kann.

Kapitel 3

Der stochastische polarisierte Strahlungstransport

Dieses Kapitel stellt den Kern der vorliegenden Arbeit dar. Aufbauend auf der Idee einer zufälligen und kleinskaligen Strukturierung des Magnetfeldes werden hier die Grundlagen des polarisierten Strahlungstransports in einem stochastischen Medium beschrieben, dessen Gültigkeitsbereich sich von einer mikroturbulenten bis hin zu einer makroturbulenten Strukturierung erstreckt. Im Rahmen des polarisierten Strahlungstransports in magnetisierten Sternatmosphären sind bisher nur wenige Ansätze bezüglich eines stochastischen polarisierten Strahlungstransports gemacht worden. Dem Autor selbst sind nur die folgenden Autoren bekannt, die dieses Thema aufgegriffen haben. Dazu zählen Domke & Pavlov (1979), Landi Degl’Innocenti (1994) sowie die bereits mehrfach in Abschnitt 1.4 erwähnten Arbeiten von Sanchez Almeida (1997, 1998) und Sanchez Almeida et al. (1996, 2000). Doch all diese Arbeiten behandeln den stochastischen Strahlungstransport nur unter den vereinfachten Bedingungen einer mikroturbulenten bzw. makroturbulenten Strukturierung der Atmosphäre. Dies erlaubt zwar eine einfache Herleitung der Transportgleichungen sowie eine einfache numerische Behandlung des Problems, doch sind diese beiden Fallunterscheidungen nur von begrenzter Anwendbarkeit für den allgemeinen Fall einer Mesostruktur und somit auch nur in eingeschränkter Weise für die Interpretation von realen Beobachtungen geeignet. Die Berücksichtigung einer endlichen Korrelationslänge erlaubt es, eine allgemeingültige Mesostrukturierung der Atmosphäre zu berücksichtigen und so eine Brücke zwischen dem mikrostrukturierten und makrostrukturierten Fall zu schlagen.

Aufgrund der weitgehenden Unkenntnis über die genauere Strukturierung und die physikalischen Parameter der nicht aufgelösten magnetischen Strukturen in der Photosphäre soll eine konsequent statistische Herangehensweise zur Beschreibung der atmosphärischen Verhältnisse gewählt werden. Diese statistische Beschreibung führt dazu, dass der Strahlungstransport als stochastischer Prozess beschrieben werden kann.

Zunächst soll aber in 3.1 die Bedeutung von räumlichen Korrelationseigenschaften näher untersucht werden. In 3.2 werden dann die Grundlagen eines stochastischen Prozesses dargelegt, und anschliessend wird in Abschnitt 3.3 die Spezialisierung auf einen Markov-Prozess beschrieben. Der Markov-Prozess dient dann in Abschnitt 3.4 dazu, die sogenannte Master-Gleichung, eine Bestimmungsgleichung für das Wegverhalten der Wahrscheinlichkeitsdichte, abzuleiten. Alternativ dazu wird in Abschnitt 3.5 durch Annahme eines kontinuierlichen Prozesses eine Bestimmungsgleichung in Form einer Fokker-Planck-Gleichung

hergeleitet. Es folgt eine Beschreibung der Korrelationseigenschaften sowie der strukturellen Eigenschaften der Atmosphäre. In Abschnitt 3.7 wird dann mit Hilfe der beschriebenen strukturellen Eigenschaften und der Master-Gleichung eine Bestimmungsgleichung in Form einer Integro-Differentialgleichung für den bedingten Stokes-Vektor abgeleitet.

3.1 Zur Bedeutung von Korrelationseffekten

Um im folgenden einen Eindruck zu erhalten welchen Einfluß die Ausdehnung der absorbierenden atmosphärischen Strukturen auf die Lösung des Strahlungstransports hat, wird hier an einem einfachen Beispiel gezeigt, wie in niedrigster Ordnung, die allgemeine Lösung des statistisch fluktuierenden Falles von der mikroturbulenten Lösung abweicht. Dabei wird vereinfachend der Fall unpolarisierter Strahlung in einer planparallelen und rein absorbierenden Atmosphäre betrachtet. Das fluktuierende Medium soll hier zunächst aus Gründen der Einfachheit allein durch eine zufällige Realisierungen des Magnetfeldvektors $\mathbf{B}$ entlang der Sichtlinie bestimmt sein. In Abschnitt 3.6 wird dann eine Verallgemeinerung des Vektors $\mathbf{B}$ eingeführt, der eine Erweiterung auf beliebige atmosphärische Parameter erlaubt. Schreiben wir zunächst die unpolarisierte Transportgleichung für die Intensität bei der Frequenz ν im rein absorbierenden Medium wie folgt:

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = -\kappa(\mathbf{B})I, \quad (3.1)$$

Dabei gehen wir davon aus, dass das Magnetfeld direkt oder indirekt das Absorptionsverhalten beeinflusst. Im folgenden soll der Frequenzindex der Übersichtlichkeit halber fortgelassen werden. Die unpolarisierte Transportgleichung für den mikrostrukturierten Fall lautet dagegen

$$\frac{dI_{mic}(s)}{ds} = -\langle \kappa \rangle I_{mic}, \quad (3.2)$$

wobei der Erwartungswert des Absorptionskoeffizienten $\langle \kappa \rangle$ sich aus

$$\langle \kappa \rangle = \int_{\mathbf{B}} \kappa(\mathbf{B})p(\mathbf{B})d\mathbf{B} \quad (3.3)$$

ergibt, mit der räumlichen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\mathbf{B})$ des Magnetfeldvektors. Nun definieren wir eine Funktion $U(s)$, die unsere korrekte Lösung $I(s)$ und die mikroturbulente Lösung $I_{mic}(s)$ in Beziehung setzt. Für diese soll gelten

$$U(s) = \frac{I(s)}{I_{mic}(s)}. \quad (3.4)$$

Aus dieser Definition erhalten wir für $U(s)$ dann folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dU(s)}{ds} = -\Delta\kappa(\mathbf{B})U, \quad (3.5)$$

wobei $\Delta\kappa(\mathbf{B})$ gegeben ist durch

$$\Delta\kappa(\mathbf{B}) = \kappa(\mathbf{B}) - \langle \kappa \rangle. \quad (3.6)$$

Die Lösung von (3.5) läßt sich unmittelbar angeben als

$$U(s) = U_0 e^{-\tau^*(s)}, \quad (3.7)$$

wobei $\tau^*(s)$ durch

$$\tau^*(s) = \int_0^s \Delta\kappa(\mathbf{B}, s_1) ds_1 \quad (3.8)$$

definiert ist. Nun kann die Lösung (3.7) in eine Taylor-Reihe entwickelt werden, wodurch wir

$$U(s) = U_0 \left(1 - \tau^* + \frac{1}{2}(\tau^*)^2 - \frac{1}{6}(\tau^*)^3 + \dots \right) \quad (3.9)$$

erhalten. Um nun einen sinnvollen und repräsentativen Wert für $U(s)$ in einer Atmosphäre mit statistisch fluktuierenden Eigenschaften - fluktuierenden Absorptionskoeffizienten - zu erhalten, berechnen wir den Erwartungswert von $U(s)$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U_0 = 1$ gesetzt werden soll,

$$\langle U(s) \rangle = \left(1 - \langle \tau^* \rangle + \frac{1}{2} \langle (\tau^*)^2 \rangle - \frac{1}{6} \langle (\tau^*)^3 \rangle + \dots \right). \quad (3.10)$$

Wenn wir die Definition von $\Delta\kappa(\mathbf{B})$ in (3.6) berücksichtigen und Terme dritter und höherer Ordnung vernachlässigen, erhalten wir

$$\langle U(s) \rangle = \left(1 + \frac{1}{2} \langle (\tau^*)^2 \rangle + O((\tau^*)^3) \right). \quad (3.11)$$

Wenn weiterhin berücksichtigt wird, dass τ^* gemäß Gleichung (3.8) definiert ist, folgt für $(\tau^*(s))^2$

$$(\tau^*(s))^2 = \int_0^s \int_0^s \Delta\kappa(\mathbf{B}, s_1) \Delta\kappa(\mathbf{B}, s_2) ds_1 ds_2 \quad (3.12)$$

$$= 2 \int_0^s \int_0^{s_1} \Delta\kappa(\mathbf{B}, s_2) \Delta\kappa(\mathbf{B}, s_1) ds_2 ds_1. \quad (3.13)$$

So gilt für die Bildung des Erwartungswert von $(\tau^*(s))^2$ unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolgen

$$\begin{aligned} \langle (\tau^*(s))^2 \rangle &= \\ \int_0^s \int_0^s \int_{\mathbf{B}} \int_{\mathbf{B}} \Delta\kappa(\mathbf{B}_1, s_1) \Delta\kappa(\mathbf{B}_2, s_2) p(\mathbf{B}_1, s_1; \mathbf{B}_2, s_2) d\mathbf{B}_1 d\mathbf{B}_2 ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Hierbei wurde die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{B}_1, s_1; \mathbf{B}_2, s_2)$ eingeführt, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, am Ort s_1 den Magnetfeldvektor in einem Intervall $\mathbf{B}_1 \dots d\mathbf{B}_1$ und am Ort s_2 den Magnetfeldvektor in einem Intervall $\mathbf{B}_2 \dots d\mathbf{B}_2$ vorzufinden. Die inneren Integrale in Gleichung (3.14) über die jeweiligen Zustände $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ beschreiben hier die räumliche Korrelation der beiden Zustände, ausgedrückt durch die Kovarianz.

Durch die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte wird deutlich, dass die Effekte, die in niedrigster Ordnung eine Abweichung von Eins in $U(s)$ bewirken, durch die gemeinsame Dichtefunktion $p(\mathbf{B}_1, s_1; \mathbf{B}_2, s_2)$ bestimmt werden. So wird eine Abweichung von der mikroturbulenten Formulierung dann auftreten, wenn die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Magnetfeldelementes bzw. eines Magnetfeldregimes an der Stelle s_2 nicht unabhängig davon ist, welches magnetische Regime an der Stelle s_1 vorherrscht. Dies ist genau dann der Fall, wenn die jeweiligen magnetischen Strukturen untereinander korreliert sind und somit eine endliche Ausdehnung - Korrelationslänge - besitzen.

3.2 Der stochastische Prozess

Das wichtigste Hilfsmittel zur Beschreibung der atmosphärischen Strukturen sowie des Strahlungstransports in dieser Arbeit ist das des stochastischen Prozess. Dazu sollen in diesem Abschnitt kurz die Grundlagen eines stochastischen Prozesses erläutert werden. Betrachten wir dazu zunächst eine Zufallsvariable X mit einer zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder kurz Dichtefunktion $p(x)$, die in folgender Weise die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\lambda)$ bestimmt:

$$P(x \leq \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} p(x) dx . \quad (3.15)$$

Die Funktion $P(x \leq \lambda)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, einen Wert x kleiner oder gleich λ bei der Realisierung von X zu erhalten. Die Dichtefunktion $p(x)$ erfüllt dabei folgende Bedingungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad p(x) \geq 0 . \quad (3.16)$$

Stochastische Prozesse beschreiben nun Systeme, die sich probabilistisch in der Zeit oder entlang einer Wegstrecke entwickeln können. Dazu betrachten wir zunächst eine Variable Y , die ihrerseits eine Funktion $f(X)$ der Zufallsvariablen X ist. Die so definierte Variable stellt somit selbst eine Zufallsvariable dar. Enthält die Funktion $f(X)$ und damit auch Y , eine zusätzliche Zeitabhängigkeit bzw. Wegabhängigkeit, sodass gilt

$$Y(t) = f(X, t) \quad \text{bzw. für eine konkrete Realisierung} \quad y(t) = f(x, t) , \quad (3.17)$$

dann stellt dies einen stochastischen Prozess in der Zeit t bzw. entlang der Wegstrecke t dar (van Kampen, 1985). Der Prozess $Y(t)$ beschreibt so für die verschiedenen Realisierungen y von Y , zu den verschiedenen Zeit- bzw. Wegabschnitten t , eine bestimmte Trajektorie durch den Zustandsraum von Y . Für die nun ebenfalls zeitabhängige Dichtefunktion von $Y(t)$ folgt dann

$$p(y, t) = \delta(y - f(X, t)) . \quad (3.18)$$

Hierbei ist $\delta(y - f(X, t))$ die Dirac-Deltafunktion. Das bedeutet nun, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte selbst eine in der Zeit bzw. entlang einer Wegstrecke veränderliche Funktion

ist. Die Wahrscheinlichkeit entwickelt sich also von einem gegebenen Anfangszustand im Verlaufe der zurückgelegten Wegstrecke und ist nicht mehr statisch.

Um die Wahrscheinlichkeitsdichte einer gesamten Trajektorie angeben zu können, muss im allgemeinen die gemeinsame Dichtefunktion p_n für die jeweiligen Zeit- bzw. Wegabschnitte t_i bekannt sein. So gilt für die gemeinsame Dichtefunktion p_n

$$\begin{aligned} p_n(y_n, t_n; y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1) &= \\ &= \delta(y_n - f(X, t_n)) \delta(y_{n-1} - f(X, t_{n-1})) \dots \delta(y_1 - f(X, t_1)) \\ &= \prod_{j=1}^n \delta(y_j - f(X, t_j)) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Von besonderem Interesse im Rahmen dieser Arbeit ist die Definition des Erwartungswertes eines stochastischen Prozesses $Y(t)$, denn dieser stellt den Zusammenhang mit makroskopisch messbaren Größen des Systems her. Der Erwartungswert des Prozesses $Y(t_n)$ soll am Ort t_n beschrieben werden, nach dem dieser bereits einen Pfad, beginnend bei einem Ausgangszustand y_1 am Ort t_1 , durch den Zustandsraum genommen hat. Der Erwartungswert kann mit Hilfe von (3.19) gebildet werden, indem über die Gesamtheit aller möglichen Trajektorien integriert wird (Gardiner, 1985),

$$\langle Y(t_n) \rangle = \int_{I_n} \int_{I_{n-1}} \dots \int_{I_1} y_n p_n(y_n, t_n; y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1) dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n . \quad (3.20)$$

In der Praxis wird es jedoch ausserordentlich schwierig sein, die gemeinsame Dichtefunktion in der Form von (3.19) aus den physikalischen Gegebenheiten und Randbedingungen zu formulieren bzw. zu approximieren. Da hierbei die Information an allen Stellen t_i der Trajektorie benötigt wird, sodass eine explizite Beschreibung der Zusammenhänge in Form einer gemeinsamen Dichtefunktion im allgemeinen nicht möglich sein wird. Eine Möglichkeit zur Reduzierung der Komplexität besteht in der Annahme, dass die verschiedenen Realisierungen bzw. Zustände y_i an den verschiedenen Orten t_i nicht miteinander korreliert sind, also statistisch unabhängig sind. Dann faktorisiert die gemeinsame Dichtefunktion in (3.19) in die jeweiligen Dichtefunktionen $p(y_i, t_i)$ und ermöglicht so eine einfache Bestimmung, falls die jeweiligen Dichtefunktionen bekannt sind. Dieser Weg soll aber in dieser Arbeit ausdrücklich nicht gegangen werden, da hier gerade die Korrelationseffekte und deren Auswirkungen auf das entstehende Stokes-Spektrum genauer untersucht werden sollen. Eine andere Art der Reduzierung der Komplexität besteht in der Annahme eines sogenannten Markov-Prozesses. Dieser spezielle stochastische Prozess soll nun im folgenden Abschnitt genauer betrachtet werden.

3.3 Der Markov-Prozess

Im folgenden sollen die Begriffe Zeit und Wegstrecke für t zunächst noch synonym benutzt werden, insbesondere soll im Rahmen des hier vorgestellten Markov-Prozesses die Wegstrecke als eine eindimensionale Strecke betrachtet werden, da die Erweiterung für den mehrdimensionalen Fall nicht ohne weiteres innerhalb der Markov-Theorie möglich ist (van

Kampen, 1985). Zunächst führen wir die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte ein, die wie folgt mit der n -Punkt-Wahrscheinlichkeitsdichte p_n im Zusammenhang steht:

$$p_n(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1) = \frac{p_n(y_n, t_n; \dots; y_1, t_1)}{p_{n-1}(y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1)}. \quad (3.21)$$

So ist also p_n konditioniert auf alle Vorgängerzustände der Trajektorie durch den Zustandsraum. Diese Form macht nochmals deutlich, dass für die Beschreibung der gemeinsamen Dichtefunktion p_n die gesamte Vorinformation des Prozesses notwendig ist. Diese Beziehung kann nun rekursiv auf jede nächstniedrige Hierarchie p_{n-1} angewandt werden, um schließlich für die gemeinsame Dichtefunktion p_n folgenden Ausdruck zu erhalten

$$\begin{aligned} p_n(y_n, t_n; y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1) &= p_n(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1) \\ &\cdot p_{n-1}(y_{n-1}, t_{n-1} \mid y_{n-2}, t_{n-2}; \dots; y_1, t_1) \dots p_2(y_2, t_2 \mid y_1, t_1) p_1(y_1, t_1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Beim Markov-Prozess wird ausgenutzt, dass die Korrelationen zwischen zwei weit entfernten Zuständen in vielen physikalischen Systemen oft nur schwach ausgeprägt ist, sodass die Korrelationseigenschaften oft nur in erster Ordnung berücksichtigt werden brauchen (Honerkamp, 1990). So gilt für einen Markov-Prozess folgende Approximation

$$p_n(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1}; \dots; y_1, t_1) = p_2(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1}). \quad (3.23)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit besitzt also bei einem Markov-Prozess nur eine Abhängigkeit zur unmittelbaren Vergangenheit und ist so von weiter zurückliegenden Ereignissen entkoppelt. Der Zustand zur Zeit oder Wegstrecke t_n ist nur von dem unmittelbar zurückliegenden Zustand bei t_{n-1} abhängig. Alle übrigen Zustände, die weiter zurückliegen wie $t_{n-2}, t_{n-3}, \dots$, haben also keinen Einfluss auf den momentanen Zustand. Die ausschliessliche Korrelation mit dem unmittelbar zurückliegenden Zustand stellt natürlich nur eine Idealisierung dar, ist jedoch von enormer praktischer Bedeutung, da es mit ihr gelingt, eine Differentialgleichung für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(y, t)$ eines stochastischen Prozesses zu formulieren, welches für Prozesse mit Korrelationen in höherer Ordnung nicht ohne weiteres möglich ist (Gardiner, 1985).

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte wird im Sprachgebrauch der stochastischen Prozesse auch Übergangswahrscheinlichkeit genannt. Eine Konsequenz aus der Markov-Bedingung (3.23) ist, dass sich jede höhere Hierarchie der gemeinsamen Dichtefunktion derart reduzieren lässt, dass

$$\begin{aligned} p_3(y_3, t_3; y_2, t_2; y_1, t_1) &= p_3(y_3, t_3 \mid y_2, t_2; y_1, t_1) p_2(y_2, t_2; y_1, t_1) \\ &= p_2(y_3, t_3 \mid y_2, t_2) p_2(y_2, t_2 \mid y_1, t_1) p_1(y_1, t_1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

gilt, sich also beschreiben lässt durch die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_2(y_i, t_i \mid y_{i-1}, t_{i-1})$ der Zwischenzustände und eine anfänglichen Dichtefunktion $p_1(y_1, t_1)$, wobei gilt $t_3 > t_2 > t_1$. Aus Gleichung (3.24) wird unmittelbar der Beschreibungsmechanismus innerhalb der Markov-Theorie deutlich, wie sich aus einer Anfangsdichte $p_1(y_1, t_1)$ mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten der Prozess entwickelt. Ein Markov-Prozess, dessen Übergangswahrscheinlichkeit nur von der Zeit- bzw. Wegdifferenz abhängt, bezeichnet man als

homogen oder stationär. Um eine direkte Beziehung zwischen den Zuständen y_3 und y_1 mit Hilfe des Markov-Formalismus herzustellen kann durch Integration von (3.24) über y_2 und anschließender Division durch $p_1(y_1, t_1)$, folgende Gleichung hergeleitet werden

$$p_2(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int p_2(y_3, t_3 | y_2, t_2) p_2(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2, \quad (3.25)$$

dies ist die sogenannte *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*. Sie besitzt folgende Interpretation: Die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den entfernten Zuständen y_1 und y_3 entspricht dem Produkt der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen dem Anfangszustand y_1 und einem Zwischenzustand y_2 sowie zwischen dem Zwischenzustand y_2 und dem Endzustand y_3 , integriert über alle möglichen Zwischenzustände. Jeder stochastische Prozess mit einer Anfangsdichtefunktion $p_1(y_1, t_1)$ und einer Übergangswahrscheinlichkeit $p_2(y_i, t_i | y_{i-1}, t_{i-1})$, die die Chapman-Kolmogorov-Gleichung (3.25) erfüllt, definiert in eindeutiger Weise einen Markov-Prozess (Honerkamp, 1990). Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung ist auch Ausgangspunkt für die Formulierung einer Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte, die sogenannte *Master-Gleichung*, die im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

3.4 Die Master-Gleichung

Im folgenden soll auf die Indizien der n-Punkt-Wahrscheinlichkeitsdichten der Übersichtlichkeit halber verzichtet werden. Um die Entwicklung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. der Übergangswahrscheinlichkeit mit der Wegstrecke s zu untersuchen, entwickeln wir zunächst für einen Markov-Prozess die Übergangswahrscheinlichkeit $p(x, s + \tau | x'', s)$ für ein kleines Wezelement τ in erster Ordnung:

$$p(x, s + \tau | x'', s) = [1 - a(x, s)\tau]\delta(x - x'') + w(x, x'', s)\tau + O(\tau^2). \quad (3.26)$$

Hierbei ist $w(x, x'', s)$ die Übergangsrate pro Zeit- bzw. Wegintervall vom Zustand x'' zum Zustand x . Der Term $a(x, s)$ läßt sich durch die folgende Normierungsbedingung für die Übergangswahrscheinlichkeit aus der Gleichung 3.26 gewinnen (Gardiner, 1985):

$$\int_I p(x, s + \tau | x'', s) dx = 1, \quad (3.27)$$

wobei über den gesamten Zustandsraum I integriert wird. Daraus folgt

$$a(x'', s) = \int_I w(x, x'', s) dx. \quad (3.28)$$

Die Form 3.26 bedeutet, dass bei einer Realisierung der Zufallsvariablen $X(s)$ nach jedem noch so kleinen Schritt τ diese mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den gleichen Wert beibehält oder mit der komplementären Wahrscheinlichkeit einen anderen Wert annimmt.

Nun wird die Chapman-Kolmogorov-Gleichung (3.25) zusammen mit der Gleichung (3.26) benutzt, um die Übergangswahrscheinlichkeit $p(x, s + \tau \mid x', s')$ vom Zustand x' zum Zustand x auszudrücken:

$$\begin{aligned} p(x, s + \tau \mid x', s') &= \int_I p(x, s + \tau \mid x'', s) p(x'', s \mid x', s') dx'' \\ &= [1 - a(x, s)\tau] p(x, s \mid x', s') + \tau \int_I w(x, x'', s) p(x'', s \mid x', s') dx'' + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Wird nun der Limes $\tau \rightarrow 0$ ausgeführt, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, s \mid x', s')}{\partial s} &= \\ &= \int_I w(x, x'', s) p(x'', s \mid x', s') dx'' - \int_I w(x'', x, s) p(x, s \mid x', s') dx''. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Hierbei wurde Gleichung (3.28) benutzt, um $a(x, s)$ durch $w(x'', x, s)$ auszudrücken. Dies ist die sogenannte Master-Gleichung (van Kampen, 1985). Eine in der physikalischen Literatur verbreitete Form der Master-Gleichung erhält man, indem (3.30) mit $p(x', s')$ multipliziert und folgend über x' integriert wird. So ergibt sich

$$\frac{\partial p(x, s)}{\partial s} = \int_I w(x, x'', s) p(x'', s) dx'' - \int_I w(x'', x, s) p(x, s) dx''. \quad (3.31)$$

Die Veränderung der Wahrscheinlichkeitsdichte (3.31) bzw. Übergangswahrscheinlichkeit (3.30) mit dem anfänglichen Zustand x' am Ort t' hin zum Zustand x am Ort t wird demnach durch zwei Terme gesteuert: Einen Term, der die Übergänge von allen beliebigen Zwischenzuständen x'' hin zum betrachteten Zustand x beschreibt, sowie einen Term, der die Übergänge vom dem betrachteten Zustand x fort zu allen beliebig anderen Zuständen x'' des Systems beschreibt. Die Gleichung (3.31) formuliert also die Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte durch einen Gewinnterm, der Übergänge der Form $x'' \rightarrow x$ beschreibt, und einen Verlustterm, der Übergänge der Form $x \rightarrow x''$ beschreibt.

Die Übergangswahrscheinlichkeitsraten w wurden hierbei für kleine Zeiten als bekannt vorausgesetzt. Dies ist für praktische Zwecke durchaus sinnvoll, da es oft aus den physikalischen Zusammenhängen heraus gelingt, diese zu formulieren oder entsprechende Hypothesen über deren Kurzzeitverhalten anzustellen (Honerkamp, 1990). Dies werden wir später im Abschnitt 3.6 ausnutzen, in dem das Kurzzeit- bzw. Kurzwegverhalten der Übergangswahrscheinlichkeit mit einem diskontinuierlichen Markov-Prozess, dem sogenannten Kubo-Anderson-Prozess (Frisch & Frisch, 1976), beschrieben wird.

Sind die Realisierungen der Zustandsvariablen X durch diskrete Zustände gegeben, läßt sich die Master-Gleichung (3.31) auch in diskreter Form angeben. Hierbei wird die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_1(x, s)$ durch die diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_n(s)$ ersetzt. Daraus ergibt sich für die diskrete Form der Master-Gleichung

$$\frac{\partial p_n(s)}{\partial s} = \sum_{n'} [w_{n,n'}(s) p_{n'}(s) - w_{n',n}(s) p_n(s)]. \quad (3.32)$$

Weiterhin sind hier die kontinuierlichen Übergangsraten $w(x, x', s)$ durch diskreten Übergangsraten $w_{n,n'}(s)$ zu ersetzen. Die diskreten Wahrscheinlichkeiten in (3.32) gehorchen ebenfalls der Normierungsbedingung $\sum_n p_n = 1$.

3.5 Die Fokker-Planck-Gleichung

Die wesentliche Charakteristik der im vorherigen Abschnitt hergeleitete Master-Gleichung waren ihre diskontinuierlichen Trajektorien im Zustandsraum. Bedingt durch das Verharren im Ausgangszustand bzw. durch den Sprung in einen beliebigen anderen Zustand x besteht eine Trajektorie aus kontinuierlichen Linien mit $x_s = \text{const.}$, unterbrochen von abrupten Sprüngen. Ein spezieller Typ der Master-Gleichung läßt sich gewinnen für den Grenzfall sehr kleiner Sprungweiten. Dabei wird in der Modellbeschreibung die Sprungweite in der Regel durch physikalische Randbedingungen begrenzt. Es läßt sich mit Hilfe eines Abstandsmaßes r , das die Größe des Sprunges $r = x - x'$ zwischen zwei Zuständen x und x' angibt, für die Übergangsraten folgende Beziehung angeben:

$$w(x, x', s) = w(x, x - r, s) \equiv \tilde{w}(r, x', s) = \tilde{w}(r, x - r, s), \quad (3.33)$$

wobei $\tilde{w}$ als alternative Darstellung der Übergangsrate eingeführt wurde. Die Master-Gleichung (3.31) kann dann geschrieben werden als

$$\frac{\partial p(x, s)}{\partial s} = \int_I \tilde{w}(r, x - r, s) p(x - r, s) dr - \int_I \tilde{w}(-r, x, s) p(x, s) dr. \quad (3.34)$$

Um nun das Grenzverhalten für kleine Sprünge zu betrachten, müssen zwei Annahmen gemacht werden derart, dass für kleines $\delta > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(r, x', s) &\approx 0 \quad \text{für} \quad |x| > \delta, \\ \tilde{w}(r, x' + \Delta x, s) &\approx \tilde{w}(r, x', s) \quad \text{für} \quad |\Delta x| < \delta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Erstere Bedingung sagt aus, dass die Funktion $\tilde{w}(r, x', s)$ Werte ungleich 0 nur in einem sehr engen Bereich um $r = 0$ hat. Die zweite Bedingung besagt, dass die Funktion $\tilde{w}(r, x', s)$ eine mit x' nur langsam variierende Funktion ist. Wenn diese Annahmen gelten, kann die Funktion innerhalb des ersten Integrals in (3.34) an der Stelle x in eine Taylor-Reihe entwickelt werden, sodass

$$\frac{\partial p(x, s)}{\partial s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k q_k(x) p(x, s) - \int_I \tilde{w}(r, x, s) p(x, s) dr. \quad (3.36)$$

Hierbei ist

$$q_k(x) = \int_I r^k \tilde{w}(r, x, s) dr \quad (3.37)$$

definiert worden. Wie aus (3.36) ersichtlich, hebt sich die Entwicklung in nullter Ordnung und der letzte Term gegeneinander auf, sodass sich (3.36) auf

$$\frac{\partial p(x, s)}{\partial s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k q_k(x) p(x, t), \quad (3.38)$$

vereinfacht. In der Literatur ist (3.38) als Kramers-Moyal-Entwicklung bekannt (van Kampen, 1985). Werden nun in (3.38) nur die Terme bis zur zweiten Ordnung beibehalten, so

erhält man direkt eine Gleichung vom Fokker-Planck-Typ für die Zeit- bzw. Wegentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{\partial p(x, s)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} q_1(x) p(x, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q_2(x) p(x, s) . \quad (3.39)$$

Diese Gleichung beschreibt die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte unter dem Einfluss von kontinuierlichen Übergängen, die Trajektorie im Zustandsraum besitzt somit einen kontinuierlichen Verlauf. Der erste Term q_1 auf der rechten Seite wird als Driftterm bezeichnet und hat gemäß der Definition (3.37) die Bedeutung eines Mittelwertes. Der zweite Term der rechten Seite q_2 wird als Diffusionsterm bezeichnet und bestimmt gemäß (3.37) die Streuung um den Mittelwert. So ist der Prozess charakterisiert durch eine Drift entlang des Mittelwertes und eine zufällige Streuung um diesen Wert.

3.6 Struktur und Korrelationseigenschaften

Die weitgehende Unkenntnis der detaillierten Verhältnisse in den räumlich nicht auflösbaren Bereichen der solaren Photosphäre legt eine Beschreibung mit Hilfe statistischer Mittel nahe. Dabei wird neben einer Wahrscheinlichkeitsdichte, die die globale Verteilung der atmosphärischen Strukturen beschreibt, die Korrelation zwischen den einzelnen atmosphärischen Strukturen von wesentlicher Bedeutung sein. Wie bereits in Abschnitt 3.1 dargelegt wurde, wird eine adäquate Beschreibung von atmosphärischen Strukturen mit einer endlichen Ausdehnung ohne Berücksichtigung der räumlichen Korrelation nicht möglich sein.

Ausgangspunkt für die Beschreibung der atmosphärischen Struktur bildet hier zunächst die Annahme, dass das räumliche Gebiet, dass zum Entstehen der beobachteten Spektrallinie beiträgt, durchsetzt ist mit einem fluktuierenden Magnetfeld zufälliger Ausdehnung, Stärke, und Ausrichtung sowie einer zufälligen Realisierung aller weiteren atmosphärischen Parameter. Die fluktuierenden Strukturen sollen durch die Zufallsvariable B^* beschrieben werden. Die Zufallsvariable B^* ist hier bewußt mit einem Stern indiziert worden, um den Unterschied, der im folgenden noch näher erläutert wird, zu dem herkömmlichen Magnetfeldvektor zu verdeutlichen. Jede Realisierung der Zufallsvariablen B^* soll einer bestimmten Realisierung der verschiedenen atmosphärischen Parameter α_j wie Temperatur, Elektronendruck, Plasmageschwindigkeit, Magnetfeldstärke, Magnetfeldausrichtung etc. entsprechen. Die atmosphärischen Parameter bilden somit ihrerseits Zufallsvariablen. So können wir nun $\mathbf{B}^*$ als *Zufallsvektor* definieren, dessen Komponenten sich aus den Zufallsvariablen der atmosphärischen Parameter α_j ergeben,

$$\mathbf{B}^* = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T . \quad (3.40)$$

Für eine konkrete Realisierung i von $\mathbf{B}^*$ gilt dann

$$\mathbf{B}_i^* = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni})^T , \quad (3.41)$$

wobei der Index T den transponierten Vektor kennzeichnet. Hier soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass Ausdrücke wie magnetisches Element, Zustand, Struktur oder Regime im folgenden synonym benutzt werden. Eine statistische Charakterisierung der atmosphärischen Verhältnisse kann so durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\mathbf{B}_i^*)$

erfolgen. Die Dichtefunktion $p(\mathbf{B}_i^*)$ hängt natürlich gemäß der Definition (3.40) von der gemeinsamen Dichtefunktion der einzelnen atmosphärischen Parameter ab,

$$p(\mathbf{B}_i^*) = p(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}). \quad (3.42)$$

In dieser Arbeit soll zunächst die Annahme gemacht werden, dass die jeweiligen atmosphärischen Parameter α_j statistisch unabhängig sind. Für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $\mathbf{B}_i^*$ gilt in diesem Fall dann

$$p(\mathbf{B}_i^*) = p(\alpha_{1i})p(\alpha_{2i}) \dots p(\alpha_{ni}). \quad (3.43)$$

So setzt sich $p(\mathbf{B}_i^*)$ aus den Produkten der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichten der atmosphärischen Parameter zusammen. Im folgenden soll der Index i , mit dem eine Realisierung der Zufallsvariablen α_{ji} und des Zufallsvektors $\mathbf{B}_i^*$ gekennzeichnet ist, der Übersichtlichkeit halber fortgelassen werden. Wenn im folgenden eine Unterscheidung zwischen Zufallsvariable und dessen Realisierung nötig ist, wird darauf explizit hingewiesen. Für die Integration über den gesamten Zustandsraum der magnetischen Elemente, welche sich wiederum aus der Integration über die jeweiligen Zustandsräume der atmosphärischen Parameter α_j ergibt, soll weiterhin folgende Normierungsbedingung gelten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(\alpha_1)p(\alpha_2) \dots p(\alpha_n) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n = 1. \quad (3.44)$$

Da nun die magnetischen Strukturen $\mathbf{B}^*$ bzw. deren zugrundeliegende atmosphärischen Parameter α_j entlang der Sichtlinie in der Atmosphäre vom Ort s abhängen, beschreibt $\mathbf{B}^*$ nun einen *stochastischen Prozess* entlang dieser Sichtlinie. Dies führt somit auch zu einer wegabhängigen Wahrscheinlichkeitsdichte der Form,

$$p(\mathbf{B}^*, s) = p(\alpha_1, s)p(\alpha_2, s) \dots p(\alpha_n, s). \quad (3.45)$$

Es soll nun angenommen werden, dass dieser stochastische Prozess den Bedingungen eines Markov-Prozesses genügt, sodass Korrelationseigenschaften in Betracht gezogen werden können. Die Korrelation zweier Zufallsvektoren $\mathbf{B}^*(s_1)$ und $\mathbf{B}^*(s_2)$ an den Orten s_1 und s_2 steht mit dem aus dem Markov-Formalismus so wichtigen Begriff der Übergangswahrscheinlichkeit in folgender Beziehung (Honerkamp, 1990):

$$\begin{aligned} Cor(\mathbf{B}^*(s_1), \mathbf{B}^*(s_2)) &\propto Cov(\mathbf{B}^*(s_1), \mathbf{B}^*(s_2)) = \langle\langle \mathbf{B}^*(s_1), \mathbf{B}^*(s_2) \rangle\rangle \\ &= \int (\mathbf{B}_{s_1}^* - \langle \mathbf{B}^*(s_1) \rangle)(\mathbf{B}_{s_2}^* - \langle \mathbf{B}^*(s_2) \rangle) p(\mathbf{B}_{s_1}^*, \mathbf{B}_{s_2}^*) d\mathbf{B}_{s_2}^* d\mathbf{B}_{s_1}^* \\ &= \int (\mathbf{B}_{s_1}^* - \langle \mathbf{B}^*(s_1) \rangle)(\mathbf{B}_{s_2}^* - \langle \mathbf{B}^*(s_2) \rangle) p(\mathbf{B}_{s_2}^* | \mathbf{B}_{s_1}^*) p(\mathbf{B}_{s_1}^*) d\mathbf{B}_{s_2}^* d\mathbf{B}_{s_1}^*, \end{aligned} \quad (3.46)$$

wobei $Cov(\mathbf{B}^*(s_1), \mathbf{B}^*(s_2))$ die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen ist. So ist die räumliche Korrelation zweier Zufallsvariablen unmittelbar mit der Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den beteiligten Zuständen verbunden.

Um nun den stochastischen Prozess 3.45 als auch die strukturellen Eigenschaften der Atmosphäre vollständig zu beschreiben, muss für eine kleine Wegstrecke Δs ein Modell gefunden werden, dass die Übergangswahrscheinlichkeit - und somit auch die Korrelation - zwischen zwei Zuständen $\mathbf{B}_s^*$ und $\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*$ an den Orten s bzw. $s + \Delta s$ beschreibt und gleichzeitig den Anforderungen eines Markov-Prozesses genügt. Ein geeigneter Prozess, der die Übergangswahrscheinlichkeit charakterisiert, ist der in der astrophysikalischen Literatur (Frisch & Frisch, 1976) als Kubo-Anderson-Prozess bekannte Markov-Prozess. Bei ihm handelt es sich um einen diskontinuierlichen Markov-Prozess, d.h. die Trajektorien durch den Zustandsraum sind unstetig und können abrupte Sprünge aufweisen. Dies unterstützt besonders das zugrundegelegte physikalische Bild einer stochastischen Organisation der Atmosphäre in Form von magnetisch dünnen Flussröhren. Der Kubo-Anderson-Prozess gehorcht der im Abschnitt 3.4 beschriebenen Master-Gleichung. Das Kurzzeit- bzw. Kurzwegverhalten ist beim Kubo-Anderson-Prozess wie folgt definiert

$$p(\mathbf{B}_{s+\Delta s}^* | \mathbf{B}_s^*) = e^{-\frac{\Delta s}{l}} \delta(\mathbf{B}_s^* - \mathbf{B}_{s+\Delta s}^*) + (1 - e^{-\frac{\Delta s}{l}}) p(\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*). \quad (3.47)$$

Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen *Sprung* vom Ausgangszustand $\mathbf{B}_s^*$ am Ort s nach einer Wegstrecke Δs in einen anderen Zustand $\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*$ durch das Produkt $(1 - e^{-\frac{\Delta s}{l}}) p(\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*)$ bestimmt wird. Die Wahrscheinlichkeit für das *Verbleiben* im Ausgangszustand hingegen, ausgedrückt durch die Dirac-Delta-Funktion $\delta(\mathbf{B}_s^* - \mathbf{B}_{s+\Delta s}^*)$, nimmt gemäß $e^{-\frac{\Delta s}{l}}$ mit der Entfernung Δs ab. Der Parameter l entspricht hierbei der mittleren Weglänge für das Verbleiben im Ausgangszustand und kann somit auch als die mittlere Ausdehnung der entsprechenden Strukturen angesehen werden. Da l über die Gleichung (3.47) direkt mit der Korrelation zweier Zustände am Ort s und Δs zusammenhängt, wird l auch als Korrelationslänge bezeichnet. Die Korrelationslänge ist im allgemeinen abhängig von dem Ort s und von dem magnetischen Regime $\mathbf{B}_i^*$. Im folgenden wollen wir jedoch zunächst annehmen, dass die Korrelationslänge unabhängig vom Ort ist, und die Übergangswahrscheinlichkeit bzw. die Übergangsraten nur von Δs abhängen, also den Wegdifferenzen. Diese Annahme führt so im folgenden zur Beschreibung eines stationären Markov-Prozesses (Honerkamp, 1990).

Für die später im Rahmen der Master-Gleichung (3.31) benötigte Übergangsrate vom einem Zustand $\mathbf{B}_s^*$ an der Stelle s zu einem Zustand $\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*$ an der Stelle $s + \Delta s$ ergibt sich aus dem Kubo-Anderson-Prozess (3.47)

$$w(\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*, \mathbf{B}_s^*) = \frac{1}{l} e^{-\frac{\Delta s}{l}} p(\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*). \quad (3.48)$$

Wenn wir annehmen, dass die Korrelationslänge l viel größer ist als das betrachtete Wegelement Δs , kann die Exponentialfunktion in (3.47) durch ihre Taylor-Entwicklung in erster Ordnung ersetzt werden, so dass die Übergangsrate auch wie folgt geschrieben werden kann

$$w(\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*, \mathbf{B}_s^*) = \frac{1}{l} p(\mathbf{B}_{s+\Delta s}^*). \quad (3.49)$$

So wird die Übergangsrate also durch die für jedes Regime gültige Korrelationslänge und die Wahrscheinlichkeitsdichte des Zielzustandes kontrolliert.

3.7 Die stochastische Transportgleichung

Aufbauend auf den stochastischen Grundlagen und strukturellen Annahmen der Atmosphäre wird nun der polarisierte Strahlungstransport nicht mehr als deterministischer Prozess betrachtet werden, bei dem eine umfassende Kenntniss der zur Linienentstehung beitragenden atmosphärischen Verhältnisse vorliegt; vielmehr soll nun die Linienentstehung in einem Medium betrachtet werden, in dem eine zufällig fluktuierende Strukturierung vorherrscht. Die zu charakterisierende Atmosphäre soll die aus dem obigen Abschnitt 3.6 beschriebenen Eigenschaften besitzen und durch den ebenfalls in 3.6 definierten stochastischen Prozesses beschrieben werden können. Dies hat zur Folge, dass auch die Stokes-Parameter $\mathbf{I}$, als abhängige Größe der atmosphärischen Parameter, einen stochastischen Prozess entlang der Sichtlinie durch die Atmosphäre beschreiben.

Auf der Grundlage einer im statistischen Sinne fluktuierenden Atmosphäre und der daraus resultierenden stochastischen Beschreibung des Strahlungstransports, ist bei einem endlichen Auflösungsvermögen, die für die Beobachtung zugängliche Größe nicht der Stokes-Vektor selbst. Die Observable ist nun vielmehr durch den Erwartungswert des Stokes-Vektors gegeben, der sich aus der Gesamtheit aller möglichen Realisierungen der atmosphärischen Parameter entlang der Sichtlinie ergibt.

Gemäß der Definition des Erwartungswertes als erstes Moment der Wahrscheinlichkeitsdichte (siehe z.B. Honerkamp, 1990) soll der Erwartungswert des Stokes-Vektor für eine bestimmte Stelle s entlang der Sichtlinie in der Atmosphäre beschrieben werden, wobei gilt, dass $s_n > s_{n-1} > s_{n-2} > \dots > s_0$, und der Strahlungsstrom von s_0 ab aufwärts gerichtet ist. Die folgende Herleitung wird zunächst für eine kontinuierliche Verteilung der Zufallsvariable $\mathbf{B}^*$ durchgeführt und dann später anhand der hergeleiteten Gleichungen auf den diskreten Fall verallgemeinert. Für den Erwartungswert an einer Stelle s entlang der Sichtlinie gilt

$$\langle \mathbf{I} \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{I}_s p(\mathbf{I}_s, \mathbf{B}_s^*) d\mathbf{I}_s d\mathbf{B}_s^* . \quad (3.50)$$

Man beachte, dass es sich hier um eine kompakte Schreibweise handelt, wobei $\mathbf{B}_s^*$ gemäß der Definition aus Abschnitt 3.6 eine in Vektorschreibweise definierte Größe ist, sodass sich die Wahrscheinlichkeitsdichte sowie die Integration über die jeweiligen Komponenten, d.h. die atmosphärischen Parameter α_i , erstrecken. Entsprechendes gilt auch gemäß der Definition (2.15) für den Stokes-Vektor.

Der direkte Weg der Lösung von (3.50) durch die Berechnung der Transportgleichung für den Stokes-Vektor für jede mögliche Realisierung der atmosphärischen Verhältnisse entlang der Sichtlinie und der dann anschließenden Mittelung, ist aufgrund der enormen Vielfalt der Möglichkeiten kein praktikabler Weg und verhindert zudem mehr über die Eigenschaften des polarisierten Strahlungstransports in einer fluktuierenden Atmosphäre mit endlicher Korrelationslänge herauszufinden. Vielmehr wird es mit Hilfe des Markov-Formalismus möglich, eine elegantere und allgemeingültige Bestimmungsgleichung für den Erwartungswert des Stokes-Vektors zu formulieren.

Von besonderer Bedeutung in Gleichung (3.50) ist die Verwendung der gemeinsamen Dichtefunktion $p(\mathbf{I}_s, \mathbf{B}_s^*)$ an der Stelle s . Zwar besitzt der Stokes-Vektor, gegeben durch das Anfangswertproblem des Strahlungstransports (2.43), eine funktionale Abhängigkeit von den bestimmenden atmosphärischen Parametern, jedoch drücken wir den Erwartungswert

zunächst an einer bestimmten Stelle s innerhalb der Atmosphäre aus. So muß die Kenntnis über die Eigenschaften und Verhältnisse derjenigen Schichten, die unterhalb von s liegen, welche aber wesentlich die Eigenschaften der Stokes-Parameter bei s mitbestimmen, indirekt durch die komplexere gemeinsame Dichtefunktion $p(\mathbf{I}_s, \mathbf{B}_s^*)$ geliefert werden.

Um eine Formulierung dieser gemeinsamen Dichtefunktion zu finden, nutzen wir nun aus, dass, gemäß Abschnitt 3.6, die Zufallsvariable $\mathbf{B}^*$ und dadurch auch $\mathbf{I}$ einen stochastischen Prozess bilden, sodass es entlang einer Sichtlinie durch die Atmosphäre für jeden Ort s eine Realisierung der Zufallsvariablen $\mathbf{B}^*$ und $\mathbf{I}$ gibt. Dann folgt gemäß (3.19) für die gemeinsame Dichtefunktion $p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^*)$ an der Stelle s_n des Prozesses, dass diese von der n -Punkt-Wahrscheinlichkeitsdichte p_n abhängt, sodass

$$p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^*) \longrightarrow p_n(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*, \dots, \mathbf{I}_{s_0}, \mathbf{B}_{s_0}^*). \quad (3.51)$$

Die gemeinsame Dichtefunktion $p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^*)$ am Ort s_n hängt somit von der gesamten Vorgeschichte der Trajektorie durch den Zustandsraum von $\mathbf{B}^*$ und $\mathbf{I}$ ab. Wie bereits erwähnt wurde, machen wir die Annahme das sich der auf $\mathbf{B}^*$ beruhende stochastische Prozess durch einen Markov-Prozess approximieren läßt. Diese Annahme reduziert die Abhängigkeit auf die unmittelbar zurückliegende Nachbarschaft, sodass für die örtlich bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Übergangswahrscheinlichkeit gilt

$$p_n(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*, \dots, \mathbf{I}_{s_0}, \mathbf{B}_{s_0}^*) = p_2(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*). \quad (3.52)$$

Auf dem Weg hin zu einer Bestimmungsgleichung für die Übergangswahrscheinlichkeit (3.52) separieren wir diese zunächst. Dies geschieht mit Hilfe des Multiplikationssatzes für die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte (Gardiner, 1985), sodass

$$\begin{aligned} p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) &= \frac{p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*)}{p(\mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*)} \\ &= \frac{p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) p(\mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*)}{p(\mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*)} \\ &= p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) p^*(\mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Jetzt kann ausgenutzt werden, dass die magnetischen Elemente bzw. atmosphärischen Bedingungen $\mathbf{B}^*$ unabhängig von den Intensitäten der Stokes-Parameter sind, sodass sich die gemeinsame bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte (3.53) schließlich schreiben läßt als

$$p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) = p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) p(\mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*). \quad (3.54)$$

Nach dieser Separation nutzen wir weiter aus, dass die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte des ersten Terms auf der rechten Seite von Gleichung (3.54), $p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*)$, nun allein durch den deterministischen Prozess des Anfangswertproblems der Strahlungstransportgleichung (2.43) gegeben ist, bei dem die atmosphärischen Verhältnisse an der

Stelle s_n als auch am Ausgangsort s_{n-1} bekannt sind. Damit läßt sich die bedigte Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Übergangswahrscheinlichkeit für diesen nun deterministischen Prozess wie folgt schreiben:

$$p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) = \delta(\mathbf{I}_{s_n} - \hat{\mathbf{I}}(s_n)) . \quad (3.55)$$

Dabei ist $\delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s_n))$ die Dirac-Deltafunktion und $\hat{\mathbf{I}}(s_n)$ eine Trajektorie, die bei s_{n-1} genau $\hat{\mathbf{I}}(s_{n-1}) = \mathbf{I}_{s_{n-1}}$ erfüllt. Die Deltafunktion des Stokes-Vektors läßt sich dabei wie folgt definieren:

$$\delta(\mathbf{I}_s - \hat{\mathbf{I}}(s)) = \delta(I_s - \hat{I}(s)) \delta(Q_s - \hat{Q}(s)) \delta(U_s - \hat{U}(s)) \delta(V_s - \hat{V}(s)) . \quad (3.56)$$

Da die Trajektorie nun durch bekannte atmosphärische Bedingungen bestimmt wird, setzen wir für $\hat{\mathbf{I}}(s)$ die formale Lösung des polarisierten Strahlungstransports (2.47) ein, sodass sich (3.55) schreiben läßt als

$$p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) = \delta \left(\mathbf{I}_{s_n} - \left(\int_{s_{n-1}}^{s_n} \mathbf{O}(s_n, s'') \mathbf{K}(s'') \mathbf{S}(s'') ds'' + \mathbf{O}(s_n, s_{n-1}) \mathbf{I}(s_{n-1}) \right) \right) . \quad (3.57)$$

Kehren wir nun zunächst zurück zur Beziehung (3.54) und schreiben diese mit Hilfe der Deltafunktion (3.56) als

$$p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) = \delta(\mathbf{I}_{s_n} - \hat{\mathbf{I}}(s_n)) p^*(\mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) . \quad (3.58)$$

Durch die Separation der gemeinsamen Dichtefunktion kann nun, wie im Folgenden gezeigt wird, die *Entwicklung* des gemeinsamen Prozesses $p(\mathbf{I}_s, \mathbf{B}_s^*)$ entlang der Sichtlinie formuliert werden. Dazu betrachten wir jetzt Gleichung (3.58) für den Fall, dass sich der Endzustand entlang der Sichtlinie von einem bekannten Anfangszustand mit $\mathbf{I}_{s_0}$ und $\mathbf{B}_{s_0}^*$ am Ort s_0 hin zu einem Zustand mit $\mathbf{I}_s$ und $\mathbf{B}_s^*$ am Ort s entwickelt, und drücken die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür durch

$$p(\mathbf{I}_s, \mathbf{B}_s^* \mid \mathbf{I}_{s_0}, \mathbf{B}_{s_0}^*) = \delta(\mathbf{I}_s - \hat{\mathbf{I}}(s)) p(\mathbf{B}_s^* \mid \mathbf{B}_{s_0}^*) \quad (3.59)$$

aus, wobei $\hat{\mathbf{I}}(s_0) = \mathbf{I}_{s_0}$ gilt. Um die Entwicklung der Übergangswahrscheinlichkeit mit s zu beschreiben, differenzieren wir (3.59) nach s und machen davon Gebrauch, dass sich die Ableitung der Dirac-Deltafunktion unter Zuhilfenahme der Transportgleichung (2.43) wie folgt schreiben läßt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) &= \frac{\partial \hat{\mathbf{I}}(s)}{\partial s} \nabla_{\hat{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \\ &= (-\mathbf{K} \hat{\mathbf{I}} + \mathbf{j}) \nabla_{\hat{\mathbf{I}}} \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \\ &= -(-\mathbf{K} \hat{\mathbf{I}} + \mathbf{j}) \nabla_{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \\ &= -\nabla_{\mathbf{I}} \left((-\mathbf{K} \mathbf{I} + \mathbf{j}) \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \right) . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Der Nabla-Operator ∇_I ist dabei durch den Vektor

$$\nabla_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial I} \\ \frac{\partial}{\partial Q} \\ \frac{\partial}{\partial U} \\ \frac{\partial}{\partial V} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

gegeben. Nutzen wir weiterhin aus, dass für den zweiten Term der rechten Seite in (3.59) die in Abschnitt 3.4 definierte Master-Gleichung gilt, so folgt schließlich für die Entwicklung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p(\mathbf{I}_s, \mathbf{B}_s^* | \mathbf{I}_{s_0}, \mathbf{B}_{s_0}^*) &= -\nabla_I \left[(-\mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{j}) \delta(\mathbf{I}_s - \hat{\mathbf{I}}(s)) \right] p(\mathbf{B}_s^* | \mathbf{B}_{s_0}^*) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} w(\mathbf{B}_s^*, \dot{\mathbf{B}}_s^*) p(\dot{\mathbf{B}}_s^* | \mathbf{B}_{s_0}^*) d\dot{\mathbf{B}}_s^* \delta(\mathbf{I}_s - \hat{\mathbf{I}}(s)) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} w(\dot{\mathbf{B}}_s^*, \mathbf{B}_s^*) p(\mathbf{B}_s^* | \mathbf{B}_{s_0}^*) d\dot{\mathbf{B}}_s^* \delta(\mathbf{I}_s - \hat{\mathbf{I}}(s)) . \end{aligned} \quad (3.62)$$

Der Zustand $\dot{\mathbf{B}}_s^*$ stellt dabei zunächst einen beliebigen Zwischenzustand dar, der am Ort s erreicht wird. Wird nun die Gleichung (3.62) mit der Wahrscheinlichkeitsdichte des Anfangszustandes $p(\mathbf{B}_{s_0}^*)$ multipliziert und anschliessend über alle möglichen Ausgangszustände $\mathbf{B}_{s_0}^*$ integriert, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p(\mathbf{I}, \mathbf{B}^*) &= -\nabla_I \left[(-\mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{j}) \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \right] p(\mathbf{B}^*) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} w(\mathbf{B}^*, \dot{\mathbf{B}}^*) p(\dot{\mathbf{B}}^*) d\dot{\mathbf{B}}^* \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} w(\dot{\mathbf{B}}^*, \mathbf{B}^*) p(\mathbf{B}^*) d\dot{\mathbf{B}}^* \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Da hier nun durch die Integration die Kennzeichnung der Zustände durch die Indizes s nicht mehr nötig ist, sind diese hier und im Folgenden fortgelassen.

Nun führen wir den bedingten Erwartungswert des Stokes-Vektor ein und bezeichnen diesen mit $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}$. Dieser ist bedingt bzw. konditioniert auf die atmosphärischen Verhältnisse $\mathbf{B}_s^*$ an einer Stelle s und soll wie folgt definiert sein:

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{B}_s^*} = \int_0^{+\infty} \mathbf{I}_s p(\mathbf{I}_s | \mathbf{B}_s^*) d\mathbf{I}_s . \quad (3.64)$$

Die Komponenten des bedingten Erwartungswertes des Stokes-Vektors leiten sich so aus den jeweiligen Stokes-Parametern (2.15) ab und sind gegeben durch

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} = \begin{pmatrix} Y_{\mathbf{B}^*}^I \\ Y_{\mathbf{B}^*}^Q \\ Y_{\mathbf{B}^*}^U \\ Y_{\mathbf{B}^*}^V \end{pmatrix} . \quad (3.65)$$

Im folgenden soll der bedingte Erwartungswert des Stokes-Vektors $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}_s^*}$ aus Gründen der Übersichtlichkeit auch kurz als bedingter Stokes-Vektor bezeichnet werden. Beschreiben

wir nun die Entwicklung des bedingten Stokes-Vektor entlang der Wegstrecke s , indem wir (3.64) nach s differenzieren, dann folgt zunächst

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{+\infty} \mathbf{I} p(\mathbf{I} | \mathbf{B}^*) d\mathbf{I} . \quad (3.66)$$

Nutzen wir dabei aus, dass gilt

$$p(\mathbf{I} | \mathbf{B}^*) = \frac{p(\mathbf{I}, \mathbf{B}^*)}{p(\mathbf{B}^*)} , \quad (3.67)$$

so können wir mit Hilfe von (3.63) die Gleichung (3.66) ausformulieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{+\infty} \mathbf{I} p(\mathbf{I} | \mathbf{B}^*) d\mathbf{I} &= \int_0^{+\infty} -\nabla_I \left[(-\mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{j}) \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \right] \mathbf{I} d\mathbf{I} \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(\mathbf{B}^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\mathbf{B}^*, \dot{\mathbf{B}}^*) p(\dot{\mathbf{B}}^*) d\dot{\mathbf{B}}^* \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \mathbf{I} d\mathbf{I} \\ &- \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(\mathbf{B}^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\dot{\mathbf{B}}^*, \mathbf{B}^*) p(\mathbf{B}^*) d\dot{\mathbf{B}}^* \delta(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}(s)) \mathbf{I} d\mathbf{I} . \end{aligned} \quad (3.68)$$

Wenn nun die Integration über die Stokes-Parameter ausgeführt wird, wobei dies durch partielle Integration und unter Berücksichtigung der Dirac-Deltafunktion geschieht, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} &= -\mathbf{K}\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \mathbf{j} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(\mathbf{B}^*, \dot{\mathbf{B}}^*)}{p(\mathbf{B}^*)} \mathbf{Y}_{\dot{\mathbf{B}}^*} p(\dot{\mathbf{B}}^*) d\dot{\mathbf{B}}^* - \int_{-\infty}^{+\infty} w(\dot{\mathbf{B}}^*, \mathbf{B}^*) \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} d\dot{\mathbf{B}}^* . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Dabei wurde ebenfalls die Definition des bedingten Stokes-Vektors (3.64) verwendet. Benutzen wir für die Formulierung der Übergangsraten $w(\mathbf{B}^*, \dot{\mathbf{B}}^*)$ und $w(\dot{\mathbf{B}}^*, \mathbf{B}^*)$ die Beziehung (3.49) aus dem vorangegangenen Abschnitt und schreiben dabei für die in den jeweiligen Regimen gültige Korrelationslänge $l_{\dot{\mathbf{B}}^*}$ bzw. $l_{\mathbf{B}^*}$ dann erhalten wir nach dem einsetzen in (3.69) folgende Integro-Differentialgleichung für den bedingten Erwartungswert des Stokes-Vektors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} &= -\mathbf{K}\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \mathbf{j} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l_{\dot{\mathbf{B}}^*}} \mathbf{Y}_{\dot{\mathbf{B}}^*} p(\dot{\mathbf{B}}^*) d\dot{\mathbf{B}}^* - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l_{\mathbf{B}^*}} p(\dot{\mathbf{B}}^*) \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} d\dot{\mathbf{B}}^* . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Diese Gleichung läßt sich durch Angabe der Anfangsbedingungen

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{B}_{s_0}^*} = \int_0^{+\infty} \mathbf{I}_{s_0} p(\mathbf{I}_{s_0} | \mathbf{B}_{s_0}^*) d\mathbf{I}_{s_0} = \int_0^{+\infty} \mathbf{I}_{s_0} \delta(\mathbf{I}_{s_0} - \mathbf{I}(0)) d\mathbf{I}_{s_0} . \quad (3.71)$$

lösen; dabei ist der bedingte Stokes-Vektor $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}_{s_0}^*}$ durch die jeweiligen Stokes-Parameter $\mathbf{I}(0)$ am Grund bzw. am Startpunkt der Integration innerhalb der Atmosphäre gegeben.

Für den Fall eines diskreten Zustandsraumes läßt sich unter Ausnutzung der diskreten Master-Gleichung (3.32) die Transportgleichung auch in diskreter Form formulieren:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}_m^*}(s)}{\partial s} = -\mathbf{K} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}_m^*} + \mathbf{j} + \sum_n \frac{1}{l_{\mathbf{B}_n^*}} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}_n^*} p(\mathbf{B}_n^*) - \sum_n \frac{1}{l_{\mathbf{B}_m^*}} p(\mathbf{B}_n^*) \mathbf{Y}_{\mathbf{B}_m^*}. \quad (3.72)$$

Unter der Annahme, dass die Korrelationslänge unabhängig von den atmosphärischen Komponenten ist, kann in dem zweiten und dritten Term der rechten Seite von (3.70) die Integration über die Zustandsräume ausgeführt werden. Wenn dabei berücksichtigt wird, dass der Ausdruck

$$\langle \mathbf{I}_s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Y}_{\dot{\mathbf{B}}_s^*} p(\dot{\mathbf{B}}_s^*) d\dot{\mathbf{B}}_s^* \quad (3.73)$$

gemäß der Definition des bedingten Stokes-Vektors (3.64) dem Erwartungswert des Stokes-Vektors an der Stelle s entspricht, läßt sich die Bestimmungsgleichung des bedingten Stokes-Vektors (3.70) schreiben als

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = -\mathbf{K} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \mathbf{j} + \frac{1}{l} \langle \mathbf{I} \rangle - \frac{1}{l} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}. \quad (3.74)$$

Die resultierende Transportgleichung für den bedingten Stokes-Vektor kann weiter vereinfacht werden und in eine kompaktere Form gebracht werden, wenn berücksichtigt wird, dass es sich bei dem dritten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.70) bzw. (3.74) um einen Verlustterm bzw. um einen statistischen Absorptionsterm handelt. So kann eine erweiterte totale Absorptionsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}$ mit Hilfe der totalen Absorptionsmatrix $\mathbf{K}$ aus Abschnitt 2.5 wie folgt definiert werden

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{1} \frac{1}{l}, \quad (3.75)$$

wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist. Weiterhin läßt sich mit dem zweiten Term der rechten Seite von Gleichung (3.70) bzw. (3.74), der einen zusätzlichen Quellterm darstellt, und dem totalen Emissionsvektor $\mathbf{j}$ aus Abschnitt 2.5 ein erweiterter totaler Emissionsvektor $\tilde{\mathbf{j}}$ definieren:

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l_{\dot{\mathbf{B}}^*}} \mathbf{Y}_{\dot{\mathbf{B}}^*} p(\dot{\mathbf{B}}^*) d\dot{\mathbf{B}}^*. \quad (3.76)$$

Damit läßt sich dann die Transportgleichung für den bedingten Stokes-Vektor in folgende Form bringen

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = -\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \tilde{\mathbf{j}}. \quad (3.77)$$

Die gesuchte Observable, der Erwartungswert (3.50) des Stokes-Vektors, an der Stelle s ergibt sich nun in einfacher Weise aus dem bedingten Erwartungswert an der Stelle s als

$$\langle \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^*. \quad (3.78)$$

So ist die Berechnung des Erwartungswertes des Stokes-Vektors in einer stochastisch organisierten Atmosphäre, die durch eine globale Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{B}^*)$ und durch eine oder mehrere Korrelationslängen l charakterisiert ist, auf die Berechnung des bedingten Stokes-Vektors reduziert, für den es mit Hilfe des Markov-Formalismus aus Abschnitt 3.3 möglich ist, eine Bestimmungsgleichung in Form einer Integro-Differentialgleichung (3.69) bzw. (3.70) oder (3.74) abzuleiten.

Auf die Interpretation der Differentialgleichung für den bedingten Stokes-Vektor soll hier noch kurz eingegangen werden. Zunächst ist festzustellen, dass es sich bei dem bedingten Erwartungswert des Stokes-Vektors nicht um eine Observable handelt; erst durch Gleichung (3.78) wird aus dem bedingten Stokes-Vektor der Einzelstrukturen der mit der Beobachtung vergleichbare Erwartungswert des Stokes-Vektors. Trotzdem sind die Bestimmungsgleichungen (3.69) und die danach folgenden die entscheidenden statistischen Grundgleichungen, die die Entwicklung des Erwartungswertes durch die Atmosphäre charakterisieren.

Der große Vorteil der entwickelten Transportgleichungen für die bedingten Stokes-Vektoren liegt in der Tatsache, dass jedes Regime bzw. jede Komponente für sich allein betrachtet werden kann, obwohl die Atmosphäre ein komplexes stochastisches Ensemble dieser Komponenten bildet. Die vier Terme der rechten Seite von Gleichung (3.70), die die Veränderung der bedingten Stokes-Parameter beschreiben, sind zunächst die bekannten Beiträge durch Absorption und Emission, wie sie aus der deterministischen Transportgleichung bekannt sind, sowie zwei weitere Terme, die den Zufluss und Abfluss von Intensitäten bzw. Photonen beschreiben. Hierbei ist entscheidend, dass die Bestimmungsgleichung (3.70) *konditioniert* ist auf ein vorgegebenes atmosphärisches bzw. magnetisches Regime, sodass der Integrationsprozess der Differentialgleichungen (3.70) bzw. (3.74) *allein* in diesem vorgegebenen atmosphärischen Regime stattfindet. Bei diesem Integrationsprozess entstehen *keine Unstetigkeiten*. Die statistische *Kopplung* mit der Gesamtheit der anderen atmosphärischen Strukturen wird durch die beiden zusätzlichen Quell- und Absorptionsterme auf der rechten Seite von Gleichung (3.70) erreicht. Diese steuern für jede noch so kleine Wegstrecke Δs den statistischen Zu- und Abfluss von Photonen. Die entwickelte statistische Transportgleichung ermöglicht also das simultane Durchschreiten jeder einzelnen atmosphärischen Komponenten vom Grund bis zur Oberfläche ohne dass der Integrationsprozess Unstetigkeiten in den physikalischen Parametern ausgesetzt ist. Die Gleichung des bedingten Stokes-Vektors (3.70) besitzt Ähnlichkeit mit der Transportgleichung in einem streuenden Medium, wobei hier die Streuung nicht im Raumwinkel oder den Frequenzbereichen stattfindet, sondern im Zustandsraum der atmosphärischen Komponenten. Im Folgenden sollen aufgrund dieser Analogie die Terme, die den Zu- bzw. Abfluss der Photonen in Gleichung (3.70) beschreiben, auch als statistische Streuterme bezeichnet werden.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch kurz die resultierende Gleichung des bedingten Stokes-Vektors für den Fall angegeben, dass die atmosphärische Struktur sich durch einen kontinuierlichen Markov-Prozess beschreiben lässt. Für einen Prozess mit kontinuierlichen Übergängen wurde bereits in Abschnitt 3.5 die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte mit Hilfe einer Fokker-Planck-Gleichung ausgedrückt. Ein stochastischer Prozess mit kontinuierlichen Übergängen ist der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (Honerkamp, 1990), dessen Übergangswahrscheinlichkeit sich im Falle der hier definierten atmosphärischen Struktur wie folgt angeben lässt:

$$p(\mathbf{B}^*, s \mid \dot{\mathbf{B}}^*, \dot{s}) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2(1 - \exp^{-2r})]^{1/2}} \exp^{-(\mathbf{B}^* - \dot{\mathbf{B}}^* \exp^{-r})^2 / 2\sigma^2(1 - \exp^{-2r})}, \quad (3.79)$$

wobei $r = s - \acute{s}$ ist. Wegen des exponentiellen Charakters von r favorisiert dieser Prozess Übergänge mit kleinem r . Wenn anstelle der Master-Gleichung (3.31) in der obigen Ableitung der stochastischen Transportgleichung die Fokker-Planck-Gleichung (3.39) Verwendung findet und der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (3.79) benutzt wird, ergibt sich, nach einer ähnlichen Ableitung wie oben, für den bedingten Stokes-Vektor folgende Gleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = \frac{1}{l} \left(\mathbf{B}^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{B}^*} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{B}^*)^2} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} \right) - \mathbf{K} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \mathbf{j}, \quad (3.80)$$

wobei σ die Standardabweichung der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Man beachte hierbei, dass es sich bei $\mathbf{B}^*$ um einen Zufallsvektor handelt, sodass die obige Gleichung dem multivariaten Fall entspricht und die Differentialoperatoren über die entsprechenden Summen der atmosphärischen Parameter definiert sind, sodass

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = \frac{1}{l} \left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \sum_{ij} \sigma_{ij}^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} \right) - \mathbf{K} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \mathbf{j}. \quad (3.81)$$

Der Erwartungswert ergibt sich ebenfalls gemäß Gleichung (3.78) durch die anschließende Integration über den Zustandsraum.

Jedoch soll dieser Ansatz mit Hilfe eines kontinuierlichen Drift- und Diffusionsprozesses in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden. Aufgrund der Annahme, dass sich die strukturellen Eigenschaften der Atmosphäre in der Form von kleinskaligen fluktuierenden magnetischen Flussröhren beschreiben lassen, die durch abrupte Sprünge in den atmosphärischen Parametern gekennzeichnet sind, erscheint die Beschreibung mit Hilfe des Kubo-Anderson-Prozesses geeigneter, als die mit einem kontinuierlichen Prozess in der Form des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.

Kapitel 4

Eigenschaften der stochastischen Transportgleichung

In diesem Kapitel sollen einige Eigenschaften der im letzten Kapitel abgeleiteten stochastischen Transportgleichung für polarisiertes Licht beschrieben werden. Dazu wird zunächst gezeigt, dass wie bei der regulären Strahlungstransportgleichung für polarisiertes Licht die Formulierung einer formalen Lösung möglich ist. Weiterhin wird gezeigt, dass die beiden Formulierungen des Strahlungstransports, in einem mikroturbulenten und in einem makroturbulenten Regime, als Grenzfälle in der stochastischen Transportgleichung enthalten sind. Anschliessend wird gezeigt, wie der hergeleitete stochastische Strahlungstransport eine Erklärung für das Entstehen einer Netto-Zirkular-Polarisation bietet. Zum Abschluss dieses Kapitales werden dann die Response-Funktionen für den Fall einer stochastischen Strukturierung der Atmosphäre abgeleitet.

4.1 Die formale Lösung im stochastischen Medium

Wie bei der regulären Transportgleichung für polarisierte Strahlung (2.43) lässt sich unter der Annahme, dass die Quellfunktion bzw. der Emissionsvektor an der Stelle s bekannt ist, eine formale Lösung für den bedingten Stokes-Vektor $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}$ angeben. Betrachten wir dazu zunächst den Fall einer stochastischen und rein absorbierenden Atmosphäre mit der Transportgleichung

$$\frac{d\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}}{ds} = -\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}, \quad (4.1)$$

wobei $\tilde{\mathbf{K}}$ die erweiterte Absorptionsmatrix ist, die sich aus der Absorptionsmatrix (2.34) und dem Korrelationskoeffizienten $1/l$ zusammensetzt, sodass gilt

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{1}\frac{1}{l}, \quad (4.2)$$

hierbei ist $\mathbf{1}$ wiederum die 4×4 Einheitsmatrix. Wie in Abschnitt 2.6 wird auch hier ein linearer Operator definiert, der am Punkt s' auf den bedingten Stokes-Vektor $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}$ wirkt

und diesen gemäß der folgenden Gleichung in den bedingten Stokes-Vektor an der Stelle s transformiert:

$$\mathbf{Y}_{B^*}(s) = \tilde{\mathbf{O}}(s, s') \mathbf{Y}_{B^*}(s'). \quad (4.3)$$

Dieser Evolutions-Operator $\tilde{\mathbf{O}}(s, s')$ erfüllt weiterhin folgende Beziehungen

$$\tilde{\mathbf{O}}(s, s) = \mathbf{1} \quad (4.4)$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{O}}(s, s'') = \tilde{\mathbf{O}}(s, s') \tilde{\mathbf{O}}(s', s''), \quad (4.5)$$

wobei $\mathbf{1}$ auch hier wieder die 4×4 Einheitsmatrix ist. Wenn nun (4.3) nach s abgeleitet wird und die Beziehung (4.1) ausgenutzt wird, erhält man die folgende Differentialgleichung für den erweiterten Evolutions-Operator:

$$\frac{d}{ds} \tilde{\mathbf{O}}(s, s') = -(\mathbf{K}(s) + \mathbf{1} \frac{1}{l}) \tilde{\mathbf{O}}(s, s') = -\tilde{\mathbf{K}}(s) \tilde{\mathbf{O}}(s, s'). \quad (4.6)$$

Wenn nun Gleichung (4.3) nach s' differenziert wird und dabei Gleichung (4.6) berücksichtigt wird, erhalten wir

$$\frac{d}{ds'} \tilde{\mathbf{O}}(s, s') = -\tilde{\mathbf{O}}(s, s') (\mathbf{K}(s') + \mathbf{1} \frac{1}{l}) = -\tilde{\mathbf{O}}(s, s') \mathbf{K}(s'). \quad (4.7)$$

Mit Hilfe der obigen Beziehungen ist es nun leicht, durch direktes Einsetzen zu zeigen, dass der inhomogene Fall durch folgenden Gleichung gelöst wird:

$$\mathbf{Y}_{B^*}(s) = \int_{s_0}^s \tilde{\mathbf{O}}(s, s') \tilde{\mathbf{j}}(s') ds' + \tilde{\mathbf{O}}(s, s_0) \mathbf{Y}_{B^*}(s_0). \quad (4.8)$$

Für eine semi-unendliche Atmosphäre mit $s_0 \rightarrow -\infty$ und $s = 0$ an der Oberfläche läßt sich (4.8) schreiben als

$$\mathbf{Y}_{B^*}(s) = \int_{-\infty}^s \tilde{\mathbf{O}}(s, s') \tilde{\mathbf{j}}(s') ds'. \quad (4.9)$$

Somit läßt sich genauso wie für den regulären Stokes-Vektor auch für den bedingten Stokes-Vektor eine formale Lösung angeben.

4.2 Mikro- und makroturbulente Grenzfälle

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie die in Abschnitt 3.7 vorgestellte stochastische Transportgleichung in einfacher und natürlicher Weise die beiden Grenzfälle des Strahlungstransports in einer mikroturbulent- sowie makroturbulent strukturierten Atmosphäre beinhaltet und somit einen umfassenden *mesoturbulenten* Ansatz bietet.

Zunächst betrachten wir den Fall $l \rightarrow \infty$. Diese Grenzbetrachtung kann unmittelbar in der stochastische Strahlungstransportgleichung (3.70) bzw. (3.74) ausgeführt werden:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = \lim_{l \rightarrow \infty} -\mathbf{K} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \mathbf{j} + \frac{1}{l} \langle \mathbf{I} \rangle - \frac{1}{l} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}. \quad (4.10)$$

Es folgt, dass die beiden statistischen Streuterme der rechten Seite von (4.10) verschwinden und sich so folgende Gleichung für den bedingten Stokes-Vektor ergibt:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = -\mathbf{K} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \mathbf{j}. \quad (4.11)$$

Das ist die Transportgleichung für den bedingten Stokes-Vektor im makroturbulenten Regime. Für die Transportgleichung des bedingten Stokes-Vektors bedeutet dies, dass die statistische Kopplung mit den anderen Regimen aufgehoben ist und für die Integration durch die jeweiligen Atmosphären nur deren eigene physikalische Verhältnisse maßgeblich sind. Die Observable wird weiterhin durch die Gleichung (3.78), also den Erwartungswert repräsentiert, sodass

$$\langle \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^*. \quad (4.12)$$

Beachtet man dabei, dass aufgrund der Anfangsbedingung (3.71) gilt, dass $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(0) = \mathbf{I}_{\mathbf{B}^*}(0)$, so folgt für den makroturbulenten Fall, dass der bedingte Stokes-Vektor für alle s dem herkömmlichen Stokes-Vektor entspricht, sodass $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) = \mathbf{I}_{\mathbf{B}^*}(s)$ gilt. Damit kann Gleichung (4.12) schließlich auch als

$$\langle \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{\mathbf{B}^*}(s) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^* \quad (4.13)$$

geschrieben werden. Dies entspricht auch der herkömmlichen Art der Berechnung für die resultierenden Intensitäten unter einer makroturbulenten Strukturierung der Atmosphäre, wie dies auch insbesondere bei makroturbulenten Geschwindigkeitsfeldern angewandt wird. Aber die völlige *Entkopplung* des bedingten Stokes Vektors von allen anderen atmosphärischen Komponenten zeigt hierbei deutlich den modellhaften Charakter dieser Annahme, die besagt, dass die Sichtlinie im gesamten Entstehungsbereich der Spektrallinie das betrachtete atmosphärische Regime bzw. die Komponente nicht verläßt, ungeachtet der lateralen Ausdehnung der Strukturen!

Um nun den mikroturbulenten Fall, $l \rightarrow 0$, zu untersuchen genügt es jetzt nicht mehr, einfach den Grenzfall auf die Gleichung (3.70) bzw. (3.74) anzuwenden, da im Abschnitt 3.6 die Übergangsrate für ein kleines Verhältnis von Wegelement Δs zu Korrelationslänge l entwickelt wurde und so die Ausführung des Limes nicht mehr der eigentlichen Übergangswahrscheinlichkeit entsprechen würde. Um hier eine entsprechende Transportgleichung für den mikroturbulenten Fall herzuleiten, führen wir den Grenzprozess zunächst für die Übergangswahrscheinlichkeit aus, also für den in Abschnitt 3.6 betrachteten Kubo-Anderson-Prozess. Dann folgt

$$\lim_{l \rightarrow 0} p(B_{s+\Delta s}^* | B_s^*) = \lim_{l \rightarrow 0} e^{-\frac{\Delta s}{l}} \delta(B_s^* - B_{s+\Delta s}^*) + (1 - e^{-\frac{\Delta s}{l}}) p(B_{s+\Delta s}^*) = p(B_{s+\Delta s}^*). \quad (4.14)$$

So geht die Wahrscheinlichkeit für das Verbleiben im Ausgangszustand gegen Null, sodass die Übergangswahrscheinlichkeit allein durch die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte des neuen Zielzustandes bestimmt wird. So ist die Übergangswahrscheinlichkeit im mikroturbulenten Grenzfall vollständig *entkoppelt* von dem Ausgangszustand und es besteht keine Korrelation zu diesem mehr.

Nun setzen wir bei der gemeinsamen bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte (3.54) aus dem Abschnitt 3.7 an. Für diese galt

$$p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) = p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) p(\mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*). \quad (4.15)$$

Unter der Annahme des mikroturbulenten Grenzfalles und gemäß Gleichung (4.14) kann obige Gleichung in folgender Form geschrieben werden:

$$p(\mathbf{I}_{s_n}, \mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) = p(\mathbf{I}_{s_n} \mid \mathbf{B}_{s_n}^*, \mathbf{I}_{s_{n-1}}, \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*) p(\mathbf{B}_{s_n}^*). \quad (4.16)$$

Jetzt kann die weitere Ableitung in gleicher Weise erfolgen wie in Abschnitt 3.7, jedoch unter der Berücksichtigung, dass die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{B}_{s_n}^* \mid \mathbf{B}_{s_{n-1}}^*)$ unabhängig von Ausgangszustand ist und somit der Wahrscheinlichkeitsdichte des Zielzustandes entspricht. Dies führt dann für die Ableitung der gemeinsamen Dichtefunktion nach s zu folgender Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial s} p(\mathbf{I}, \mathbf{B}^*) = -\nabla_I [(-\mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{j}) \delta(\mathbf{I} - \mathbf{I}^*(s))] p(\mathbf{B}^*). \quad (4.17)$$

Wird jetzt die Entwicklung des Erwartungswertes mit Hilfe von Gleichung (3.50),

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle \mathbf{I}(s) \rangle = \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \mathbf{I} p(\mathbf{I}, \mathbf{B}^*) d\mathbf{I} d\mathbf{B}^*, \quad (4.18)$$

ausgedrückt und nutzen wir weiterhin die Gleichung (4.17), dann erhalten wir nach Vertauschung der Differentiation und Integration folgende Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty -\nabla_I [(-\mathbf{K}\mathbf{I} + \mathbf{j}) \delta_s(\mathbf{I} - \mathbf{I}^*(s))] p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{I} d\mathbf{B}^*. \quad (4.19)$$

Nun kann die Integration nach dem Stokes-Vektor ausgeführt werden, wobei auch hier wieder partiell integriert wird, sodass wir folgende Gleichung erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathbf{K}\mathbf{I}^* + \mathbf{j}) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^*. \quad (4.20)$$

Die atmosphärisch abhängigen Parameter $\mathbf{B}^*$ sind in der totalen Absorptionsmatrix $\mathbf{K}$ sowie in dem totalen Emissionsvektor $\mathbf{j}$ enthalten, sodass wir, unter Berücksichtigung der vollständigen Entkopplung der Zustände, nach der Integration über den Zustandsraum von $\mathbf{B}^*$ die statistischen Mittelwerte der totalen Absorptionsmatrix und des totalen Emissionsvektors erhalten. So kann die Entwicklung des mittleren Stokes-Vektors $\langle \mathbf{I}(s) \rangle$ schließlich wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle \mathbf{I}(s) \rangle = -\langle \mathbf{K}\mathbf{I} \rangle + \langle \mathbf{j} \rangle. \quad (4.21)$$

Dies ist die Transportgleichung für polarisiertes Licht im Falle einer mikroturbulenten Strukturierung der Atmosphäre. Hierbei kann also der Mittelungsprozess mit Hilfe einer globalen Wahrscheinlichkeitsdichte durchgeführt werden, noch bevor die eigentliche Transportgleichung aufintegriert wird. Anhand der Ableitung der Transportgleichung für den mikroturbulenten Fall ist jedoch deutlich geworden, dass diese nur für den Grenzfall $l \rightarrow 0$ bzw. für den Fall einer vollständigen Unkorreliertheit der atmosphärischen Strukturen Gültigkeit hat. Gleichung (4.21) entspricht der unter der MISMA-Hypothese hergeleiteten Transportgleichung für polarisierte Strahlung von Sanchez-Almeida et al. (1996), bei der jegliche Korrelationseffekte vernachlässigt wurden.

4.3 Asymmetrische Stokes-V-Profile

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie es unter Verwendung des in dieser Arbeit entwickelten stochastischen Ansatzes zur Entstehung asymmetrischer Stokes-Profile und im Besonderen zu der Entwicklung einer nicht verschwindenden Netto-Zirkular-Polarisation kommt. Messungen zeigen, dass die Mehrheit der beobachteten Stokes-V-Profile aus magnetisch aktiven wie auch ruhigen Gebieten in der Photosphäre charakteristische Asymmetrien aufweisen. Die Erklärung dieser Asymmetrien war und ist Gegenstand vieler Forschungsbemühungen, wozu u.a. Arbeiten von Illing et al. (1974, 1975), Landi Degl’Innocenti & Landolfi (1983), Stenflo et al. (1984), Solanki & Pahlke (1988), Sanchez Almeida et al. (1989), Sanchez Almeida & Lites (1992), Grossman-Doerth et al. (2000), Steiner (2000) sowie Lopez Ariste (2002) gehören. Die besondere Herausforderung liegt zunächst zweifellos in der Tatsache begründet, dass die Symmetrie der Transportgleichung unter den Bedingungen einer statischen und homogenen Atmosphäre nicht gebrochen werden kann. Verschiedene Ansätze, bei denen Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes und anderer Parameter entlang der Sichtlinie vorhanden sind, vermochten zumindest qualitativ die Entstehung asymmetrischer Profile zu erklären. Somit kann die Asymmetrie der Stokes-Profile und insbesondere der Stokes-V-Profile, wertvolle Informationen über die atmosphärischen Verhältnisse liefern

4.3.1 Netto-Zirkular-Polarisation

Als sehr nützliche Beschreibung der Asymmetrie von Stokes-V-Profilen haben sich die Amplituden und die Flächenasymmetrie der beiden antisymmetrischen Stokes-V-Komponenten erwiesen. In diesem Abschnitt wollen wir jedoch gezielter die Flächenasymmetrie betrachten, da nur sie Informationen über Veränderungen der Geschwindigkeitsverhältnisse und anderer atmosphärischen Parameter entlang der Sichtlinie enthält. Diese Flächenasymmetrie läßt sich sehr gut durch die Netto-Zirkular-Polarisation (im englischen, net circular polarisation, NCP) charakterisieren. Die Netto-Zirkular-Polarisation ist wie folgt definiert:

$$NCP(s) = \int_{\Lambda} V(s, \lambda) d\lambda, \quad (4.22)$$

wobei $V(s, \lambda)$ das Stokes-V-Profil an der Stelle s und bei der Wellenlänge λ angibt. Das Integrationsintervall Λ umfasst dabei das gesamte Profil der betrachteten Spektrallinie. Von asymmetrischen Stokes-V-Profilen in Bezug auf die Flächenasymmetrie wird gesprochen, wenn die Netto-Zirkular-Polarisation ungleich Null ist.

4.3.2 Symmetrie-Betrachtungen

Fassen wir zunächst die Ergebnisse der bisherigen Erkenntnisse zusammen, die zur Entstehung asymmetrischer Stokes-V-Profile führen. Im einfachsten stationären Fall zeigten Landi Degl'Innocenti & Landolfi (1983), dass für die Linienabsorptionsmatrix Ψ bei einer beliebigen Verschiebung von $\Delta\lambda$ um die zentrale Wellenlänge λ_0 folgendes gilt:

$$\Psi(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_I & \Psi_Q & \Psi_U & \Psi_V \\ \Psi_Q & \Psi_I & \Psi_V^* & -\Psi_U^* \\ \Psi_U & -\Psi_V^* & \Psi_I & \Psi_Q^* \\ \Psi_V & \Psi_U^* & -\Psi_Q^* & \Psi_I \end{pmatrix}.$$

Unter der Transformation $\Delta\lambda \rightarrow -\Delta\lambda$ geht diese, mit $\Psi_I \equiv \Psi_I(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ u.s.w., über in

$$\Psi(\lambda_0 - \Delta\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_I & \Psi_Q & \Psi_U & -\Psi_V \\ \Psi_Q & \Psi_I & \Psi_V^* & \Psi_U^* \\ \Psi_U & -\Psi_V^* & \Psi_I & -\Psi_Q^* \\ -\Psi_V & -\Psi_U^* & \Psi_Q^* & \Psi_I \end{pmatrix}.$$

Dies hat seine Ursache in den Symmetrieeigenschaften der einzelnen Profildfunktionen $\Psi_{I,Q,U}$ und Ψ_V^* , welche gemäß ihrer Definitionen aus (2.25) bzw. (2.40) als Funktionen der Wellenlänge bezüglich der zentralen Referenzwellenlänge λ_0 symmetrisch sind, während Ψ_V und $\Psi_{U,Q}^*$ antisymmetrisch sind. Die Substitution der Absorptionsmatrix $\Psi(\lambda_0 + \Delta\lambda) \rightarrow \Psi(\lambda_0 - \Delta\lambda)$ in der Lösung der Strahlungstransportgleichung (2.47) führt mit $\mathbf{I}(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (I, Q, U, V)$ zu dem neuen Lösungsvektor

$$\mathbf{I}(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (I, Q, U, -V). \quad (4.23)$$

D.h. das Stokes-V-Profil ist relativ zur zentralen Wellenlänge λ_0 antisymmetrisch, während die anderen drei Stokes-Komponenten symmetrisch sind. Die wesentlichen Annahmen, die diesem Ergebnis zugrundeliegen, sind die des lokalen thermischen Gleichgewichts (LTE) sowie die, dass keine Materieströmungen auftreten. Die Bedingung, dass keine Materieströmungen auftreten, kann insofern gelockert werden, dass ein vorhandenes Geschwindigkeitsfeld über den Entstehungsbereich der Spektrallinie stationär bleibt. Dies führt so nur zu einer Verschiebung der zentralen Wellenlänge λ_0 und läßt die Symmetriebetrachtungen unberührt. Auf der anderen Seite führt jedes nichtstationäre Geschwindigkeitsfeld zu einer Brechung der Symmetrie (Lopez Ariste, 2002). Arbeiten von Solanki und Pahlke (1988), Sanchez Ameida et al. (1989) sowie Lopez Ariste (2002) haben in diesem Zusammenhang auch gezeigt, wie die Netto-Zirkular-Polarisation in erster Ordnung von den entsprechenden Gradienten sowohl der Geschwindigkeit als auch des Magnetfeldes abhängen. Lopez Ariste (2002) zeigt weiterhin, wie in höherer Ordnung allein ein nichtstationäres Geschwindigkeitsfeld zur Netto-Zirkular-Polarisierung beiträgt.

Um die Auswirkung mehrerer stationärer bzw. homogener Atmosphären, die im Folgenden auch als makrostrukturiert bezeichnet werden sollen, auf die resultierende Netto-Zirkular-Polarisation zu untersuchen, betrachten wir zunächst den beobachtbaren Erwartungswert des Stokes-V-Parameters. Dieser ergibt sich aus der Integration über die beitragenden

Stokes-V-Komponenten der verschiedenen Atmosphären sowie über eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{B}^*)$, die die Häufigkeitsverteilung der atmosphärischen Komponenten charakterisiert. So folgt

$$\langle V \rangle = \int_I V(\mathbf{B}^*) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^* \quad (4.24)$$

Hierbei ist $\mathbf{B}^*$ wieder der Vektor, der die atmosphärischen Parameter bestimmt, und I stellt den Zustandsraum von $\mathbf{B}^*$ dar. Wenn nun die Netto-Zirkular-Polarisation gemäß Gleichung (4.22) berechnet wird, kann ausgenutzt werden, dass die Integrationsreihenfolgen vertauschbar sind, sodass

$$NCP(\langle V \rangle) = \langle NCP(V) \rangle = \langle \int_{\Lambda} V d\lambda \rangle = \int_I \int_{\Lambda} V(\mathbf{B}^*) d\lambda p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^* \quad (4.25)$$

Da die jeweiligen makrostrukturierten Atmosphären als homogen, also ohne Gradienten in den physikalischen Parametern angenommen wurden, ist deren jeweiliger Beitrag zur Netto-Zirkular-Polarisation gleich Null, sodass auch die Netto-Zirkular-Polarisation über den Erwartungswert des Stokes-V-Profiles Null ist. Dies bedeutet, dass inhomogene Strukturen, die allein senkrecht zur Sichtlinie vorliegen, keinen Einfluss auf die Netto-Zirkular-Polarisation haben.

4.3.3 Entstehung der Netto-Zirkular-Polarisation

Hier soll nun gezeigt werden, wie der in dieser Arbeit entwickelte stochastische polarisierte Strahlungstransport durch seine statistischen Streuterme zu einer nicht verschwindenden Netto-Zirkular-Polarisation führen kann. Da die Ursachen verschiedener inhomogener atmosphärischer Parameter, wie bereits erwähnt, mehrfach Gegenstand verschiedener Untersuchungen waren, betrachten wir nun ein vereinfachtes Modell einer stochastischen Atmosphäre, um allein die durch die Zusammensetzung der fluktuierenden Atmosphäre bedingte Generierung einer Netto-Zirkular-Polarisation zu untersuchen. Hierzu nehmen wir ein Ensemble aus verschiedenen atmosphärischen Komponenten an, wobei jede der jeweiligen Komponenten als homogen vorausgesetzt wird, d.h. sie besitzt also keine Gradienten in ihren atmosphärischen Parametern sowohl vertikal als auch horizontal. Vereinfacht nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit und das Magnetfeld in jeder Komponente verschieden sind. Die Geschwindigkeiten und Magnetfeldevektoren in den jeweiligen atmosphärischen Komponenten gehorchen einer global für die stochastische Atmosphäre gültigen diskreten Wahrscheinlichkeitsdichte mit $p_{B_i^*}$ bzw. kurz als p_i bezeichnet. Diese wird, entsprechend der Definition aus Abschnitt 3.6 durch das Produkt der unabhängigen diskreten Wahrscheinlichkeitsdichten p_k^v und p_l^B , für die Geschwindigkeit mit einer Realisierung k und des Magnetfeldvektors mit Realisierung l , gegeben.

Zunächst soll der Entstehungsprozess des bedingten Stokes-Vektors in einem schwach polarisierenden Medium betrachtet werden. Die Annahme eines schwach polarisierenden Mediums stellt keine prinzipielle Einschränkung dar, es soll vielmehr die entsprechenden Gleichungen übersichtlicher gestalten. Wesentliche Annahme des schwach polarisierenden Mediums ist

$$\Psi_I \gg |\Psi_Q|, |\Psi_U|, |\Psi_V|, |\Psi_Q^*|, |\Psi_U^*|, |\Psi_V^*| \quad (4.26)$$

Hier und im folgenden soll angenommen werden, dass die Profilkfunktion im Gegensatz zur Definition in Abschnitt 2.5 den multiplikativen Term des Linienabsorptionkoeffizienten bereits beinhaltet, Ψ_I zusätzlich auch den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten. Die formale Lösung des bedingten Stokes-Vektor, gegeben durch Gleichung (4.8) lässt sich dann für eine schwach polarisierende Atmosphäre wie folgt schreiben

$$\mathbf{Y}_{B^*}(s) = \int_{s_0}^s \tilde{\mathbf{O}}^*(s, s') \tilde{\mathbf{j}}(s') ds' + \tilde{\mathbf{O}}^*(s, s_0) \mathbf{Y}_{B^*}(s_0) , \quad (4.27)$$

wobei $\tilde{\mathbf{O}}^*$ der Evolutions-Operator des schwach polarisierenden Atmosphäre ist und seinerseits gegeben ist durch

$$\tilde{\mathbf{O}}^*(s, s') = \left[\mathbf{1} - \int_{s'}^s \Delta \mathbf{K}(s'') ds'' \right] \exp \left[- \int_{s'}^s \Psi_I(s'') ds'' \right] . \quad (4.28)$$

Hierbei ist $\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{1} \Psi_I - \frac{1}{l}$. Damit ist Gleichung (4.28) formal identisch mit der Definition des Evolutions-Operator von Sanchez Almeida & Trujillo Bueno (1999) in einer konventionellen schwach polarisierenden Atmosphäre, mit der Ausnahme der Definition von $\Delta \mathbf{K}$. Die Annahme, dass die thermische Emission in der betrachteten Atmosphäre ebenfalls schwach polarisierend ist, führt für den bedingten Stokes-V-Parameter, welcher jetzt explizit bezogen ist auf ein atmosphärisches Regime B_j^* , zu folgender Gleichung:

$$Y_j^V(s) = \int_{-\infty}^s \left[j_V^j(s') - j_I^j(s') \int_{s'}^s \Psi_V^j(s'') ds'' \right] \exp \left[- \int_{s'}^s \Psi_I^j(s'') ds'' \right] ds' . \quad (4.29)$$

Beachten wir nun, dass die atmosphärischen Verhältnisse in den jeweiligen Komponenten als konstant angenommen wurden, so erhalten wir

$$Y_j^V(s) = \int_{-\infty}^s \left[j_V^j(s') - j_I^j(s') \Psi_V^j(s') \Delta s \right] \exp \left[- \Psi_I^j(s') \Delta s \right] ds' , \quad (4.30)$$

mit $\Delta s = s - s'$. Wenn $\Delta s \ll 1$ gilt, dann ist in erster Ordnung

$$Y_i^V(s) = \int_{-\infty}^s \left[j_V^j(s') - j_I^j(s') \Psi_V^j(s') \Delta s \right] (1 - \Psi_I^j(s') \Delta s) ds' . \quad (4.31)$$

Nun wird die Netto-Zirkular-Polarisation berechnet, wobei das Integral der NCP mit dem äußeren Integral in (4.31) vertauschbar ist. Weiterhin nutzen wir aus, dass die I - und V -Komponenten des Emissionsvektors ausgeschrieben wie folgt lauten

$$\tilde{j}_I = \Psi_I B_0 + \frac{1}{l} \langle I \rangle , \quad (4.32)$$

$$\tilde{j}_V = \Psi_V B_0 + \frac{1}{l} \langle V \rangle . \quad (4.33)$$

Setzen wir dies in (4.31) ein und berücksichtigen, dass die Faltung von Profilkfunktionen aus demselben homogenen atmosphärischen Regime zu keiner Netto-Zirkular-Polarisation führt (Landolfi & Degl'Innocenti, 1996), so folgt

$$\begin{aligned} NCP(Y_j^V) \approx & \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l} \langle V \rangle - \frac{1}{l} \langle I \rangle \Psi_V^j(s') \Delta s \, d\lambda \, ds' \\ & - \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l} \langle V \rangle \Psi_I^j(s') \Delta s \, d\lambda \, ds' . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Hierbei wurden die mit der Annahme des lokalen thermischen Gleichgewichts (LTE) verbundene Kirchhoff-Planck-Funktion B_0 als quasi nicht veränderlich über den Spektralbereich der Linie angenommen und Terme höherer Ordnung in Δs fortgelassen. Der erste Term der rechten Seite in Gleichung (4.34) braucht nicht weiter betrachtet zu werden, da die Integration über die Wellenlänge des gemittelten Stokes-V-Profiles aus jeweils homogenen Atmosphären gemäß der in Abschnitt 4.3.2 durchgeführten Betrachtung keinen Beitrag zur Netto-Zirkular-Polarisation liefert. Von Bedeutung für die Generierung der Netto-Zirkular-Polarisation in einem Ensemble jeweils homogener, jedoch fluktuierender atmosphärischer Komponenten ist somit folgender Ausdruck:

$$NCP(Y_j^V) \approx \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{l} \langle I \rangle \Psi_V^j(s') - \frac{1}{l} \langle V \rangle \Psi_I^j(s') \right] \Delta s d\lambda ds'. \quad (4.35)$$

Werden die mittleren Stokes-Intensitäten $\langle I \rangle$ und $\langle V \rangle$ durch die bedingten Stokes-Parameter Y_i^I und Y_i^V mit ihren entsprechenden diskreten Verteilungen p_i ausgedrückt, folgt

$$\begin{aligned} NCP(Y_j^V) \approx & \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{l} \sum_i Y_i^I(s') p_i \Psi_V^j(s') \Delta s d\lambda ds' \\ & - \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_i Y_i^V(s') p_i \Psi_I^j(s') \Delta s d\lambda ds'. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Wenn angenommen wird, dass die jeweiligen atmosphärischen Regime vorher nicht in Kontakt waren - die Sichtlinie noch keinen Übergang in ein anderes atmosphärisches Regime durchgeführt hat - können die einzelnen beitragenden Komponenten der bedingten Stokes-Vektoren vereinfacht mit Hilfe der Formel von Sears (Landolfi & Degl'Innocenti, 1996) beschrieben werden, und für (4.36) folgt

$$\begin{aligned} NCP(Y_j^V) \approx & \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{l} \left[\sum_i B_0 \left[(1 + \beta) - \beta \Psi_I^i(s') \right] p_i \right] \Psi_V^j(s') \Delta s d\lambda ds' \\ & - \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{l} \left[\sum_i -B_0 \beta \Psi_V^i(s') p_i \right] \Psi_I^j(s') \Delta s d\lambda ds'. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dabei entspricht β dem Steigungsparameter der Kirchhoff-Planck-Funktion B_0 , wie er in der analytischen Lösung unter einer Milne-Eddington-Atmosphäre angenommen wird. Berücksichtigen wir, dass die Kirchhoff-Planck-Funktion in dem betrachteten Wellenlängenintervall weitgehend unabhängig von der Wellenlänge ist und lassen die äussere Integration über s fort, so kann (4.37) auch geschrieben werden als

$$NCP(Y_j^V) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{l} \left[\langle \Psi_I \rangle \Psi_V^j - \langle \Psi_V \rangle \Psi_I^j \right] \Delta s d\lambda. \quad (4.38)$$

Drücken wir nun die Profilkfunktionen $\Psi_I^j(s')$ und $\Psi_V^j(s')$ gemäß ihrer Definitionen aus Abschnitt 2.5 aus, die wie folgt lauten

$$\Psi_I = \frac{1}{2} \left(\Psi_p \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} (\Psi_r + \Psi_b) (1 + \cos^2 \gamma) \right), \quad (4.39)$$

$$\Psi_V = \frac{1}{2} (\Psi_r - \Psi_b) \cos \gamma, \quad (4.40)$$

dann läßt sich (4.38) unter Vernachlässigung anderer Terme schreiben als

$$\begin{aligned}
NCP(Y_j^V) \propto & -\frac{1}{l} \cos(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \sin^2(\gamma) \Psi_p \rangle (\Psi_r^j - \Psi_b^j) d\lambda \\
& -\frac{1}{l} \sin^2(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} (\langle \cos(\gamma) \Psi_r \rangle - \langle \cos(\gamma) \Psi_b \rangle) \Psi_p^j d\lambda \\
& -\frac{1}{2l} \cos(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_r^j < \Psi_r(1 + \cos^2(\gamma)) > - \Psi_b^j < \Psi_b(1 + \cos^2(\gamma)) > d\lambda \\
& -\frac{1}{2l} (1 + \cos^2(\gamma_j)) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_r^j < \Psi_r \cos(\gamma) > - \Psi_b^j < \Psi_b \cos(\gamma) > d\lambda \\
& -\frac{1}{2l} \cos(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_r^j < \Psi_b(1 + \cos^2(\gamma)) > - \Psi_b^j < \Psi_r(1 + \cos^2(\gamma)) > d\lambda \\
& +\frac{1}{2l} (1 + \cos^2(\gamma_j)) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_r^j < \Psi_b \cos(\gamma) > - \Psi_b^j < \Psi_r \cos(\gamma) > d\lambda. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Dieser Term entspricht also der Entwicklung der Netto-Zirkular-Polarisation entlang eines kleinen Wegelementes Δs . Hier läßt sich bereits als interessantes Zwischenergebnis erkennen, dass die Netto-Zirkular-Polarisation in der gewählten Approximation des schwach polarisierenden Mediums keine Abhängigkeit von dem azimuthalen Winkel aufweist. Die Gültigkeit dieses Ergebnisses wurde bereits von Landolfi & Degl'Innocenti (1996) für eine konventionelle Atmosphäre mit schwachem Magnetfeld und kleinen Geschwindigkeitsgradienten entlang der Sichtlinie gezeigt.

Da sich hinter den Profilfunktionen Ψ_r, Ψ_p, Ψ_b jeweils die in Abschnitt 2.5 beschriebenen Voigt-Funktionen H verbergen, lassen sich für die resultierenden Faltungsoperationen der Voigt-Funktionen die analytischen Lösungen gemäß Landolfi & Degl'Innocenti (1996)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(v - v_0, a) H(v - v'_0, a) dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H\left(\frac{v_0 - v'_0}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a}\right) \tag{4.42}$$

verwenden. Nutzen wir diese Lösungen als auch die Annahme aus, dass der Inklinationswinkel in den verschiedenen Regimen bzw. Komponenten der Atmosphäre jeweils Null ist - eine Annahme die auch von anderen Autoren wie Solanki & Pahlke (1988) oder Sanchez Almeida et al. (1989) gewählt wurde, um ein überschaubare Beziehungen zu erhalten - so können wir (4.41) schließlich schreiben als

$$NCP(Y_j^V) \propto -\frac{1}{l} \left(\sum_{i=1}^n H\left(\frac{v_r^j - v_r^i}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a}\right) p_i - \sum_{i=1}^n H\left(\frac{v_b^j - v_b^i}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a}\right) p_i \right). \tag{4.43}$$

Dabei gilt $v_r \propto \Delta\lambda_v + g\Delta\lambda_B$ und entsprechend auch $v_b \propto \Delta\lambda_v - g\Delta\lambda_B$; diese werden also durch die Wellenlängenverschiebungen durch das Geschwindigkeitsfeld und den Zeeman-Effekts bestimmt, siehe (2.24) bzw. (2.2). Aus Gleichung (4.43) wird deutlich, dass sich eine nicht verschwindende Netto-Zirkular-Polarisation ergibt, wenn in mindestens einem atmosphärischen Regime i sowohl die Geschwindigkeit als auch die Magnetfeldstärke verschieden von denen in Regime j sind. So wird für jeden bedingten Stokes-Vektor durch seine statistischen Streuterme, die die Kopplung zu den anderen atmosphärischen Komponenten herstellen, eine nicht verschwindende Netto-Zirkular-Polarisation generiert. Weiterhin

ist zu erkennen, dass die Ausprägung der Netto-Zirkular-Polarisation durch die Korrelationslänge kontrolliert wird. Bei einem makroskopischen Regime mit $l \rightarrow \infty$ geht die Netto-Zirkular-Polarisation gegen Null, wohingegen die Netto-Zirkular-Polarisation ein Maximum für $l \rightarrow 0$ erreicht, also für den Fall einer Mikrostrukturierung der Atmosphäre. Man beachtet jedoch, dass das direkte Einsetzen von $l \rightarrow 0$ in die stochastische Transportgleichung aus den in Abschnitt 4.2 genannten Gründen nicht ohne weiteres möglich ist. Später in dieser Arbeit wird die Abhängigkeit der Netto-Zirkular-Polarisation von der Korrelationslänge anhand von Modellrechnungen näher untersucht.

4.4 Response-Funktionen im stochastischen Medium

In diesem Abschnitt soll auf die Ableitung sowie die allgemeine Darstellung der Response-Funktionen für den bedingten Stokes-Vektor unter der Voraussetzung des polarisierten Strahlungstransports in einem stochastischen Medium eingegangen werden. Response-Funktionen, die den Effekt einer Variation der atmosphärischen Parameter auf die beobachteten Intensitäten in erster Ordnung beschreiben, wurden für den Stokes-Vektor erstmals von Degl'Innocenti & Degl'Innocenti (1977) beschrieben. Response-Funktionen für den Stokes-Vektor fanden insbesondere bei der Inversion von Stokes-Profilen Verwendung (Ruiz Cobo & del Toro Iniesta, 1992). Mit ihnen war es möglich, die benötigten Ableitungen innerhalb des iterativen Inversionsprozess sehr effizient und weitgehend analytisch zu berechnen. Auch als diagnostisches Werkzeug bieten Response-Funktionen ein wichtiges Hilfsmittel für unser Verständnis über Zusammenhänge innerhalb der atmosphärischen Strukturen. Mit ihnen lassen sich z.B. sehr anschaulich die Wirkungen kleiner Änderungen der atmosphärischen Parameter an bestimmten Stellen innerhalb der Atmosphäre, auf die resultierenden Stokes-Parameter darstellen (Ruiz Cobo & del Toro Iniesta, 1994).

Ausgangspunkt für die Ableitung bilden die Differentialgleichung (3.77) sowie die formale Lösung (4.9) des bedingten Stokes-Vektors, die mit Hilfe der erweiterten Absorptionsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}$ und des erweiterten Emissionsvektors $\tilde{\mathbf{j}}$ wie folgt lauten

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = -\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \tilde{\mathbf{j}}, \quad (4.44)$$

und dessen formale Lösung für eine semi-unendliche Atmosphäre

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) = \int_{-\infty}^s \tilde{\mathbf{O}}(s, s') \tilde{\mathbf{j}}(s') ds'. \quad (4.45)$$

Wenn nun eine kleine Variation eines atmosphärischen Parameters δx_i innerhalb der betrachteten atmosphärischen Komponente angenommen wird und Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden, gehorcht die resultierende Variation des bedingten Stokes-Vektors $\delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)$ formal derselben Differentialgleichung wie (4.44), sodass wir

$$\frac{\partial \delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = -\delta \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} - \tilde{\mathbf{K}} \delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \delta \tilde{\mathbf{j}} \quad (4.46)$$

schreiben können. $\delta \tilde{\mathbf{K}}$ und $\delta \tilde{\mathbf{j}}$ sind dabei in erster Näherung gegeben durch

$$\delta \tilde{\mathbf{K}}(s) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial x_i} \delta x_i(s) \quad (4.47)$$

und

$$\delta \tilde{\mathbf{j}}(s) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{j}}}{\partial x_i} \delta x_i(s). \quad (4.48)$$

Gleichung (4.46) läßt sich zusammenfassen und schreiben als

$$\frac{\partial \delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s)}{\partial s} = -\tilde{\mathbf{K}} \delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} + \tilde{\mathbf{j}}^*, \quad (4.49)$$

wobei der Emissionsvektor $\tilde{\mathbf{j}}^*$ eingeführt wurde und folgendermaßen definiert ist

$$\tilde{\mathbf{j}}^* = \delta \tilde{\mathbf{j}} - \delta \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} \quad (4.50)$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{j}}^* = \frac{\partial \tilde{\mathbf{j}}}{\partial x_i} \delta x_i(s) - \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial x_i} \delta x_i(s) \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}. \quad (4.51)$$

Aufgrund der Analogie zwischen der Bestimmungsgleichung (4.44) für den bedingten Stokes-Vektor und der Gleichung (4.49) erhalten wir eine analoge formale Lösung, sodass die Lösung der Variation geschrieben werden kann als

$$\delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) = \int_{-\infty}^s \tilde{\mathbf{O}}(s, s') \tilde{\mathbf{j}}^*(s') ds'. \quad (4.52)$$

Nun können wir den Response-Funktions-Vektor $\mathbf{R}_i(s, s')$ definieren, der die Reaktion der bedingten Stokes-Intensitäten bei einer kleinen Störung des atmosphärischen Parameter x_i an der Stelle s innerhalb der Atmosphäre $\mathbf{B}^*$ beschreibt:

$$\mathbf{R}_i(s, s') = \tilde{\mathbf{O}}(s, s') \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{j}}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial x_i} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*} \right]. \quad (4.53)$$

Auch hier gilt zu beachten, das es sich wie beim Stokes-Vektor auch bei dem Response-Funktions-Vektor $\mathbf{R}_i(s, s')$ nicht um einen Vektor im streng mathematischen Sinne handelt. Gleichung (4.52) können wir schließlich auch schreiben als

$$\delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) = \int_{-\infty}^s \mathbf{R}_i(s, s') \delta x_i(s) ds', \quad (4.54)$$

bzw. wenn die Variation auf mehreren atmosphärischen Parametern x_i beruht, als

$$\delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) = \sum_i^m \int_{-\infty}^s \mathbf{R}_i(s, s') \delta x_i(s) ds'. \quad (4.55)$$

Die resultierende Veränderung des beobachtbaren Stokes-Vektors ergibt sich gemäß der Definition des Erwartungswertes (3.78) als

$$\delta \langle \mathbf{I}(s) \rangle = \langle \delta \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^*. \quad (4.56)$$

Hierbei wird die globale Wahrscheinlichkeitsdichte als unabhängig bezüglich der kleinen Störung δx_i angesehen. Mit den Response-Funktionen soll in den folgenden Abschnitten gezeigt werden, wie und wo bei einer stochastisch organisierten Atmosphäre der bedingte sowie der observable Erwartungswert des Stokes-Vektor auf Veränderungen der Korrelationslänge reagiert.

Kapitel 5

Numerische Lösung

In diesem Kapitel wird auf die numerische Umsetzung der in Kapitel 3.7 beschriebenen stochastischen Transportgleichungen für die bedingten Stokes-Vektoren eingegangen. Grundlage der Numerik bildet die diskrete Transportgleichung (3.72) des bedingten Stokes-Vektors, die durch eine entsprechende Diskretisierung des Zustandsraums gewonnen wurde und so die ursprüngliche Integro-Differentialgleichung in ein gekoppeltes lineares Gleichungssystem überführt. Bei diesem Gleichungssystem ist zu beachten, dass sich die Kopplung aus einem lokalen und einem globalen Anteil zusammensetzt. So entsteht eine lokale Kopplung der bedingten Stokes-Parameter untereinander wie bei der gewöhnlichen Transportgleichung für polarisiertes Licht auch, sowie eine globale Kopplung mit den jeweils gleichen bedingten Stokes-Parametern der anderen atmosphärischen Komponenten. Die Lösung des gekoppelten Gleichungssystems wird mit Hilfe eines impliziten Verfahrens erreicht, welches zu einer rekursiven Lösungsvorschrift führt.

5.1 Lösung des Differentialgleichungssystems

Ausgangspunkt ist die diskrete Form der Transportgleichung des bedingten Stokes-Vektors (3.72), die explizit die Kopplung der bedingten Transportgleichung mit den anderen atmosphärischen Komponenten aufzeigt:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{B_m^*}(s)}{\partial s} = -\mathbf{K} \mathbf{Y}_{B_m^*} + \mathbf{j} + \sum_n \frac{1}{l_{B_n^*}} \mathbf{Y}_{B_n^*} p(\mathbf{B}_n^*) - \sum_n \frac{1}{l_{B_m^*}} p(\mathbf{B}_n^*) \mathbf{Y}_{B_m^*} . \quad (5.1)$$

Durch die Kopplung über die statistischen Streuterme in jeder Gleichung der Form (5.1) erhalten wir ein gekoppeltes System von $4n$ Gleichungen. Dabei schreiben wir zunächst das diskretisierte System mit Hilfe der $4n \times 4n$ Matrix $\hat{\mathbf{M}}$, sodass

$$\frac{d\hat{\mathbf{Y}}}{ds} = \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{j}} . \quad (5.2)$$

Hierbei sind $\hat{\mathbf{Y}}$ der bedingte Stokes-Vektor des gesamten Systems, $\hat{\mathbf{j}}$ der thermische Emissionsvektor des Systems und $\hat{\mathbf{M}}$ die Systemmatrix. Wenn wir die Untermatrizen $\mathbf{R}_i$ und $\mathbf{S}_i$ einführen, die im Folgenden als Komponentenmatrix und Streumatrix bezeichnet werden und die jeweiligen Absorptionskoeffizienten des atmosphärischen Regimes i sowie die

jeweiligen gültigen Streu- bzw. Umverteilungsparameter enthalten, dann kann Gleichung (5.2) in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \frac{dY_{B_1}^I(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_1}^Q(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_1}^U(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_1}^V(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_2}^I(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_2}^Q(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_2}^U(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_2}^V(s)}{ds} \\ \vdots \\ \frac{dY_{B_n}^I(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_n}^Q(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_n}^U(s)}{ds} \\ \frac{dY_{B_n}^V(s)}{ds} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \cdots & \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{S}_3 & \cdots & \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{R}_3 & \cdots & \mathbf{S}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \cdots & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_{B_1}^I \\ Y_{B_1}^Q \\ Y_{B_1}^U \\ Y_{B_1}^V \\ Y_{B_2}^I \\ Y_{B_2}^Q \\ Y_{B_2}^U \\ Y_{B_2}^V \\ \vdots \\ Y_{B_n}^I \\ Y_{B_n}^Q \\ Y_{B_n}^U \\ Y_{B_n}^V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_{B_1}^I \\ j_{B_1}^Q \\ j_{B_1}^U \\ j_{B_1}^V \\ j_{B_2}^I \\ j_{B_2}^Q \\ j_{B_2}^U \\ j_{B_2}^V \\ \vdots \\ j_{B_n}^I \\ j_{B_n}^Q \\ j_{B_n}^U \\ j_{B_n}^V \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Dabei ist die Komponentenmatrix $\mathbf{R}_i$ durch die folgende 4×4 Matrix definiert:

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} -\Psi_{IB_i} + (1-p_{B_i}) & -\Psi_{QB_i} & -\Psi_{UB_i} & -\Psi_{VB_i} \\ -\Psi_{QB_i} & -\Psi_{IB_i} + (1-p_{B_i}) & -\Psi_{VB_i}^* & \Psi_{UB_i}^* \\ -\Psi_{UB_i} & \Psi_{VB_i}^* & -\Psi_{IB_i} + (1-p_{B_i}) & -\Psi_{QB_i}^* \\ -\Psi_{VB_i} & -\Psi_{UB_i}^* & \Psi_{QB_i}^* & -\Psi_{IB_i} + (1-p_{B_i}) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Die Streumatrix $\mathbf{S}_i$ ist definiert durch

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} -\frac{p_{B_i}}{l_{B_i}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p_{B_i}}{l_{B_i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_{B_i}}{l_{B_i}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{B_i}}{l_{B_i}} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

In obiger Darstellung ist aufgrund der Übersichtlichkeit auf den indizierten Stern, der das atmosphärische Regime B charakterisiert, verzichtet worden, da in diesem Abschnitt keine Verwechslung mit der Magnetfeldstärke bzw. dem Magnetfeldvektor droht.

Um dieses Differentialgleichungssystem zu lösen, gehen wir von einer geeigneten Diskretisierung der geometrischen Tiefe s aus und entwickeln dafür zunächst den bedingten Stokes-Vektor $\hat{\mathbf{Y}}$ des Systems mit Hilfe der Taylor-Entwicklung in zweiter Ordnung an der Stelle s ,

$$\hat{\mathbf{Y}}(s_{i+1}) = \hat{\mathbf{Y}}(s_i) + \hat{\mathbf{Y}}'(s_i)\Delta s_i + \hat{\mathbf{Y}}''(s_i)(\Delta s_i)^2, \quad (5.6)$$

wobei $\Delta s = s_{i+1} - s_i$ gilt. Weiterhin entwickeln wir die erste Ableitung in erster Ordnung um s , sodass

$$\hat{\mathbf{Y}}'(s_{i+1}) = \hat{\mathbf{Y}}'(s_i) + \hat{\mathbf{Y}}''(s_i)\Delta s_i. \quad (5.7)$$

Diese beiden Gleichungen können derart kombiniert werden, dass für den bedingten Stokes-Vektor des Systems an der Stelle s_{i+1} gilt:

$$\hat{\mathbf{Y}}(s_{i+1}) = \hat{\mathbf{Y}}(s_i) + \frac{\Delta s_i}{2} [\hat{\mathbf{Y}}'(s_i) + \hat{\mathbf{Y}}'(s_{i+1})]. \quad (5.8)$$

Die Form (5.8) stellt zunächst eine implizites Gleichungssystem dar. Benutzen wir nun die Transportgleichung (5.2) und nutzen die Linearität des Differentialgleichungssystems aus, dann können wir (5.2) in (5.8) einsetzen und anschließend nach dem gesuchten Systemvektor $\hat{\mathbf{Y}}(s_{i+1})$ auflösen, sodass wir die folgende rekursive Lösungsvorschrift erhalten:

$$\hat{\mathbf{Y}}(s_{i+1}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{Y}}(s_i) + \mathbf{E}. \quad (5.9)$$

Dabei ist die $4n \times 4n$ Matrix $\mathbf{A}$ durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}(s_{i+1}) \left[\mathbf{1} - \frac{\Delta s_i}{2} \hat{\mathbf{M}}(s_i) \right]. \quad (5.10)$$

Der Vektor $\mathbf{E}$ ist hierbei

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1}(s_{i+1}) [\hat{\mathbf{j}}(s_i) + \hat{\mathbf{j}}(s_{i+1})]. \quad (5.11)$$

Die Matrix $\mathbf{D}(s_{i+1})$ ist schließlich gegeben durch

$$\mathbf{D}(s_{i+1}) = \mathbf{1} - \frac{\Delta s_i}{2} \hat{\mathbf{M}}(s_{i+1}). \quad (5.12)$$

Die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ ist hier ebenfalls eine $4n \times 4n$ Matrix. Man beachte, dass alle Terme der rechten Seite in Gleichung (5.9) bekannt sind. Dies gilt auch für den Emissionsvektor des Systems, der hier im lokalen thermischen Gleichgewicht allein durch die jeweiligen totalen Emissionsvektoren der einzelnen atmosphärischen Komponenten gegeben ist, Gleichung (5.3). Das Gleichungssystem wird durch die Angabe der Anfangswerte für die einzelnen Komponenten des Systemvektor bestimmt. Dazu werden folgende Startwerte für die bedingten Stokes-Vektoren $\mathbf{Y}_{B_m}^*$ an der unteren Grenze s_n des m -ten Atmosphären-Regimes angesetzt (Stenflo, 1994),

$$\mathbf{Y}_{B_m}^* = B_{\nu, s_n} \mathbf{e}_0 + \left[\frac{dB_\nu}{ds} \right]_{s_n} \mathbf{K}^{-1}(s_n) \mathbf{e}_0, \quad (5.13)$$

wobei B_ν der Kirchhoff-Planck-Funktion (2.1) entspricht und $\mathbf{e}_0$ dem Einheitsvektor mit $(1, 0, 0, 0)^T$. Aus diesen bedingten Stokes-Vektoren wird dann der Systemvektor $\hat{\mathbf{Y}}(s_n)$ an der unteren Grenze der Atmosphäre gebildet. So wird am Boden der Atmosphäre von unpolarisierter Strahlung innerhalb der einzelnen Strukturen ausgegangen. Diese Annahme wird, wenn nicht ausdrücklich auf eine andere Anfangskonfiguration hingewiesen wird, in den folgenden Kapiteln der Arbeit beibehalten.

5.2 Fehlerbetrachtung

Zur Beurteilung der Fehlerordnung des vorgestellten Verfahrens, welches in der Literatur u.a. auch als implizite Trapezmethode (Schwarz, 1988) bezeichnet wird, betrachten wir den lokalen Diskretisierungsfehler $d(s_{i+1})$ an der Stelle s_{i+1} . Dazu gehen wir von der Entwicklung (5.8) aus dem letzten Abschnitt aus. Dann ist der lokale Diskretisierungsfehler gegeben durch

$$d(s_{i+1}) = \hat{\mathbf{Y}}(s_{i+1}) - \hat{\mathbf{Y}}(s_i) - \frac{\Delta s_i}{2} [\hat{\mathbf{Y}}'(s_i) + \hat{\mathbf{Y}}'(s_{i+1})] . \quad (5.14)$$

Entwickeln wir seinerseits $\hat{\mathbf{Y}}(s_{i+1})$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} d(s_{i+1}) &= (\Delta s_i) \hat{\mathbf{Y}}'(s_i) + \frac{1}{2} (\Delta s_i)^2 \hat{\mathbf{Y}}''(s_i) + \frac{1}{6} (\Delta s_i)^3 \hat{\mathbf{Y}}'''(s_i) + O((\Delta s_i)^4) \\ &\quad - \frac{(\Delta s_i)}{2} \left[\hat{\mathbf{Y}}'(s_i) + \hat{\mathbf{Y}}'(s_i) + (\Delta s_i) \hat{\mathbf{Y}}''(s_i) + \frac{1}{2} (\Delta s_i)^2 \hat{\mathbf{Y}}'''(s_i) + O((\Delta s_i)^3) \right] \\ &= \frac{1}{12} (\Delta s_i)^3 \hat{\mathbf{Y}}'''(s_i) + O((\Delta s_i)^4) . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Wenn wir berücksichtigen, dass der lokale Diskretisierungsfehler $d(s_{i+1})$ mit der Fehlerordnung p eines Lösungsverfahrens in folgender Weise in Beziehung steht (Schwarz, 1988):

$$\max_{1 \leq k \leq n} |d(s_{i+1})| \leq \text{const}(\Delta s)^{p+1} = O((\Delta s)^{p+1}) , \quad (5.16)$$

dann ist aufgrund des Hauptanteils in $d(s_{i+1})$ in Gleichung (5.16) die Fehlerordnung der in diesem Kapitel vorgestellten Methode 2. Die hier gewählte Methode zweiter Ordnung erscheint angemessen zu sein, da bei dem in dieser Arbeit zugrundegelegten stationären Markov-Prozess davon ausgegangen werden kann, dass der Hauptbeitrag zu Änderung der Systemmatrix zwischen zwei Punkten s_i und s_{i+1} im Wesentlichen durch Strahlungstransporteffekte verursacht wird. Da die wohl bekannteste und meist benutzte Integrationsmethode für die Lösung des polarisierten Strahlungstransports, die Diagonal-Elemente-Lambda-Operator-Methode (DELO), entwickelt von Rees et al. (1989), ebenfalls eine Fehlerordnung von 2 besitzt und diese bereits in zahlreichen Arbeiten Gegenstand von Fehleruntersuchungen war (z.B. Lopez Ariste & Semel, 1999; Bellot Rubio et al., 1998), kann hier angenommen werden, dass bei einer entsprechender Diskretisierung eine Methode zweiter Ordnung ausreichend ist. Bezüglich der Stabilität stellt das hier vorgestellte Verfahren aufgrund seiner impliziten Eigenschaften sich als besonders geeignet für den Fall sogenannter steifer Differentialgleichungssysteme heraus (Schwarz, 1988).

5.3 Implementation

Für die Implementierung des stochastischen Strahlungstransports wurden größere Teile des Strahlungstransportprogramms DIAMAG von Grossmann-Doerth verwendet (Grossmann-Doerth, 1994). Das im vorherigen Abschnitt beschriebene Verfahren zur Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems wurde in einem gesonderten Unterprogramm in FORTRAN programmiert und ersetzt die ursprüngliche Integrationsmethode (DELO), die im Programm DIAMAG implementiert wurde. Mit Hilfe des modifizierten Programms DIAMAG können die bedingten Stokes-Parameter entlang eines Sehstrahls für mehrere gegebene atmosphärische Komponenten berechnet und anschliessend der Erwartungswert des Stokes-Vektors gebildet werden. Dabei wird für jede atmosphärische Komponente eine planparallele Schichtung des Gesamtdrucks p und der Temperatur T angenommen. Für jeden der äquidistanten Stützpunkte in $\Delta \log(\tau)$ und für jede atmosphärische Komponente werden tabellierte Werte für die magnetische Feldstärke B , die Inklination γ , den Azimut ϕ und die Sichtlinienkomponente v der makroskopischen Geschwindigkeit des Plasmas verwendet. Auf die ursprünglich im Programm DIAMAG vorgesehene Spezifizierung der Mikroturbulenz wird hier ausdrücklich verzichtet, da in dieser Arbeit und der vorliegenden numerische Implementation die Mikroturbulenz als Spezialfall einer Sichtliniengeschwindigkeit des Plasmas mit einer Korrelationslänge gegen Null beschrieben wird. Eine Mikroturbulenz wird also durch atmosphärische Komponenten charakterisiert, die eine sehr kleine Korrelationslänge sowie eine entsprechende Verteilung ihrer Geschwindigkeitsparameter aufweisen. Der Zusammenhang zwischen optischer Tiefe τ und der geometrischen Tiefe z für die Beobachtung unter einen heliozentrischen Winkel ϕ ist durch

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu \frac{dz}{\mu} \quad (5.17)$$

gegeben, dabei ist κ_ν der Absorptionskoeffizient bei der Wellenlänge ν und μ ist durch den Kosinus des heliozentrischen Winkels gegeben, $\mu = \cos \phi$. Der Absorptionskoeffizient und somit auch die optische Tiefe wird üblicherweise bei einer Referenzwellenlänge von 500 nm bzw. 5000 Å angegeben. Mit 5.17 können für jeden heliozentrischen Winkel die physikalischen Größen von einer geometrischen Skala auf ein in $\Delta \log(\tau)$ äquidistantes Gitter umgerechnet werden. In verschiedenen Unterprogrammen von DIAMAG werden für jeden Tiefenpunkt in jeder atmosphärischen Komponente folgende Größen berechnet :

- die Teilchenzahldichten als Funktionen von Temperatur und Druck,
- die Partialdrücke aller Elemente bis zur Kernladungszahl $Z = 28$ als Funktion der Temperatur und des Elektronendrucks, wobei H_2 -Bindung und -Ionisation berücksichtigt wird,
- der kontinuierliche Absorptionskoeffizient κ_c als Funktion der Wellenlänge, Temperatur und der verschiedenen Partialdrücke,
- der Linienabsorptionskoeffizient κ_l mit den entsprechenden Profildfunktionen, ebenfalls als Funktion der Wellenlänge, Temperatur und Partialdrücke,
- das Ionisationsgleichgewicht gemäß der Saha-Gleichung 2.2.

Anschliessend wird für alle Wellenlängenpunkte innerhalb eines vorgegebenen Wellenlängenintervalls und für jeden bedingten Stokes-Vektor die stochastische Strahlungstransportgleichung mittels der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Methode berechnet.

Kapitel 6

Ein mesoturbulentes Geschwindigkeitsfeld

Hier sollen nun, aufbauend auf der im vorherigen Kapitel beschriebenen numerischen Lösung des stochastischen Strahlungstransports für polarisiertes Licht, einige einfache Modellrechnungen durchgeführt werden, um die Auswirkungen einer endlichen Korrelationslänge auf Linienparameter, wie die Profilform und Äquivalenzbreite, zu untersuchen. Hierzu wird ein mesoturbulentes Geschwindigkeitsfeld mit unterschiedlichen Korrelationslängen untersucht. Dabei ist die wesentliche Motivation für diese Modellrechnungen, dass die Ursache für die Strukturierung der Atmosphäre weniger in dem turbulenten hydrodynamischen Verhalten der Konvektion liegen soll, als vielmehr in der Präsenz kleinskaliger Magnetfeldstrukturen. So soll anhand der magnetisch nicht-aufspaltenden Absorptionslinie Fe I 5576 Å gezeigt werden, wie unterschiedliche strukturelle Ausdehnungen der Turbulenzelemente innerhalb der Atmosphäre, die Profilformen und die Äquivalenzbreite verändern. Weiterhin wird gezeigt, wie sich aus dem in dieser Arbeit entwickelten stochastischen Ansatz auch numerisch für kleine Korrelationslängen die Konvergenz zum mikroturbulenten bzw. für große Korrelationslängen zum makroturbulenten Grenzfall ergibt.

6.1 Modellbeschreibung

Nun benutzen wir die numerische Lösung der stochastischen Transportgleichung, um die Effekte einer endlichen Korrelationslänge anhand der Eisenlinie Fe I 5576 Å aufzuzeigen. Diese Linie spaltet im Magnetfeld nicht auf, so dass wir hier allein den Effekt eines mesoturbulenten Geschwindigkeitsfeldes auf die Profilform und die Äquivalenzbreite des Stokes-I-Profiles untersuchen können. Um die Konvergenz für eine Korrelationslänge $l \rightarrow 0$ gegen den mikroturbulenten Fall und für $l \rightarrow \infty$ gegen den makroturbulenten Fall zu demonstrieren, wird der Stokes-Vektor sowohl mit dem stochastischen Ansatz als auch mit den konventionellen Methoden für ein mikroturbulentes und makroturbulentes Geschwindigkeitsfeld berechnet.

Im konkreten Fall einer in der Geschwindigkeit mikroturbulenten Atmosphäre bedeutet dies, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt, die Faltung der Absorptionsmatrix bzw. deren Elemente mit der Wahrscheinlichkeitsdichte der Mikroturbulenz. Da in der konventionellen

Berechnungsweise der Mikroturbulenz fast ausschließlich eine Normalverteilung der Geschwindigkeiten mit einem Mikroturbulenzparameter ξ_{micro} als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angenommen wird, ergibt sich aus der Faltung der Absorptionsprofile (Voigt- bzw. Faraday-Voigt-Profil) mit dem Gaußprofil der Geschwindigkeitsverteilung wiederum ein Voigt- bzw. ein Faraday-Voigt-Profil mit einer modifizierten Dopplerbreite

$$\nu_D = \frac{\nu}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + \xi_{micro}} . \quad (6.1)$$

Der Mikroturbulenzparameter ξ_{micro} bestimmt hierbei die Standardabweichung, $\xi_{micro}/\sqrt{2}$, der Normalverteilung. Man beachte dabei, dass sich durch die Faltungsoperation der effektive Wirkungsquerschnitt der Absorption vergrößert und somit auch die Äquivalenzbreite der Absorptionslinie.

Für die Berechnung des anderen Grenzfalles, der Makroturbulenz, gilt ebenfalls die in 4.2 hergeleitete Beziehung. Auch hier wird üblicherweise eine Normalverteilung der Sichtliniengeschwindigkeit angenommen. Der Makroturbulenzparameter, der die Standardabweichung der angenommenen Normalverteilung beschreibt, wird hierbei mit ξ_{macro} gekennzeichnet. Da die Faltungsoperation jedoch, wie im Abschnitt 4.2 gezeigt, erst auf den bereits berechneten bedingten Stokes-Vektor angewandt wird, ergibt sich für den Erwartungswert des Stokes-Vektors unter der Annahme eines makroturbulenten Geschwindigkeitsfeldes entsprechend 4.13 folgende Gleichung

$$\langle \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{B^*}(s) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^* \quad (6.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_v(s) \frac{1}{\xi_{macro}^2 \sqrt{\pi}} e\left(-\frac{v^2}{\xi_{macro}^2}\right) dv . \quad (6.3)$$

Hierbei ist zu sehen, dass die Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichte mit dem Intensitätswert des Stokes-Vektors die resultierende Profildichte über den gesamten Spektralbereich zwar verändert, aber zu keiner Zunahme des Wirkungsquerschnittes führt und so die Äquivalenzbreite nicht beeinflusst.

Um nun mit dem entwickelten stochastischen Ansatz ein mesoturbulentes Geschwindigkeitsfeld zu beschreiben, welches beide Grenzfälle mit einschließt, muss zunächst die globale Wahrscheinlichkeitsdichte der Sichtliniengeschwindigkeit spezifiziert werden. Diese wird nun, um die Konvergenz mit den konventionell berechneten Mikro- und Makroturbulenzen zu gewährleisten, ebenfalls als normalverteilt angesehen. Als charakterisierende Größe dieser Verteilung bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte dient auch hier ein Turbulenzparameter ξ_{meso} . Für die folgenden Simulationen soll dann $\xi_{micro} = \xi_{meso} = \xi_{macro}$ gelten. Die stochastische Transportgleichung lautet somit

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_{B^*}(s)}{\partial s} = -\mathbf{K} \mathbf{Y}_{B^*} + \mathbf{j} + \frac{1}{l} \langle \mathbf{Y}_{B^*} \rangle - \frac{1}{l} \mathbf{Y}_{B^*} \quad (6.4)$$

$$= -\mathbf{K} \mathbf{Y}_v + \mathbf{j} + \frac{1}{l} \langle \mathbf{Y}_v \rangle - \frac{1}{l} \mathbf{Y}_v . \quad (6.5)$$

Hierbei wurde Gleichung (3.74) benutzt und so implizit die Annahme gemacht, dass die Korrelationslänge l unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Der observable Stokes-Vektor

bzw. die Intensität der hier betrachteten nicht-aufspaltenden Absorptionslinie ergibt sich dann gemäß Gleichung 3.78 als

$$\langle \mathbf{I}(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_{\mathbf{B}^*}(s) p(\mathbf{B}^*) d\mathbf{B}^* \quad (6.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_v(s) e\left(\frac{v^2}{\xi_{meso}^2}\right) dv. \quad (6.7)$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch zur Berechnung des Erwartungswertes innerhalb der Integro-Differentialgleichung (3.74) benutzt. Man beachte jedoch, dass zunächst die kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte (6.7) spezifiziert wurde, so dass hier nicht sofort die diskrete numerische Lösung aus Kapitel 5 angewandt werden kann. Durch eine geeignete numerische Quadratur mit Hilfe des Newton-Cotes-Verfahren erhalten wir jedoch eine entsprechende diskrete Darstellung,

$$\langle \mathbf{I}(s) \rangle = \sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_{v_j}(s) e\left(\frac{v_j^2}{\xi_{meso}^2}\right) w_j, \quad (6.8)$$

wobei w_j der Gewichtungsfaktor der j -ten Stützstelle des Newton-Cotes-Verfahren ist. Der Anfangswert für die einzelnen bedingten Stokes-Vektoren wird gemäß der Beziehung (5.13) festgelegt.

6.2 Ergebnisse

Die folgenden Berechnungen synthetischer Linienprofile der Eisenlinie Fe I 5576 Å wurden für das Temperatur- und Druckmodell der HSRASP-Atmosphäre (Chapman, 1979) durchgeführt. Dabei handelt es sich im wesentlichen um das HSRA-Modell von Gingerich et al. (1971) für die ruhige Sonne, welches bis zur Konevektionszone erweitert wurde mit dem Konvektionszonenmodell von Spruit (1974). Es werden keine weiteren Geschwindigkeiten innerhalb der Atmosphäre spezifiziert, insbesondere auch keine Mikro- bzw. Makroturbulenzen. Die synthetischen Profile der Eisenlinie Fe I 5576 Å wurden für verschiedene Werte der Turbulenzgeschwindigkeit ξ_{meso} und verschiedene Korrelationslängen l berechnet. In Abbildung 6.1 sind diese für die Korrelationslängen 10 km, 30 km, 100 km, 300 km, 1000 km und 3000 km mit einer Turbulenzgeschwindigkeit von $\xi_{meso} = 2.0$ km/s sowie $\xi_{meso} = 4.0$ km/s abgebildet. Hier zeigt sich sehr deutlich der Effekt der zunehmenden Korrelationslänge und die damit verbundene Abnahme der Absorptionfähigkeit bzw. Äquivalenzbreite. Diese Abnahme und die Diskrepanz zwischen den einzelnen Linienprofilen ist um so ausgeprägter, je größer die zugrundeliegende Turbulenzgeschwindigkeit bzw. je größer die Streuung der Geschwindigkeiten ist. Während die Linienprofile mit einer Korrelationslänge von 10 km kaum sichtbare Unterschiede zu den konventionell berechneten mikroturbulenten Linienprofilen aufweisen, ist die rapide Abnahme der Linientiefe und Äquivalenzbreite schon für Strukturlängen von oberhalb 10 km deutlich zu sehen. Dies erstreckt sich bis hinauf zu Strukturen mit einer Korrelationslänge von 1000 km, wo ein Sättigungseffekt eintritt und das Linienprofil in das konventionell berechnete makroturbulente Profil übergeht. Man beachte hierbei, dass obwohl eine Korrelationslänge von 1000 km weitaus größer ist als der Entstehungsbereich der Spektrallinie (200 km - 300 km)

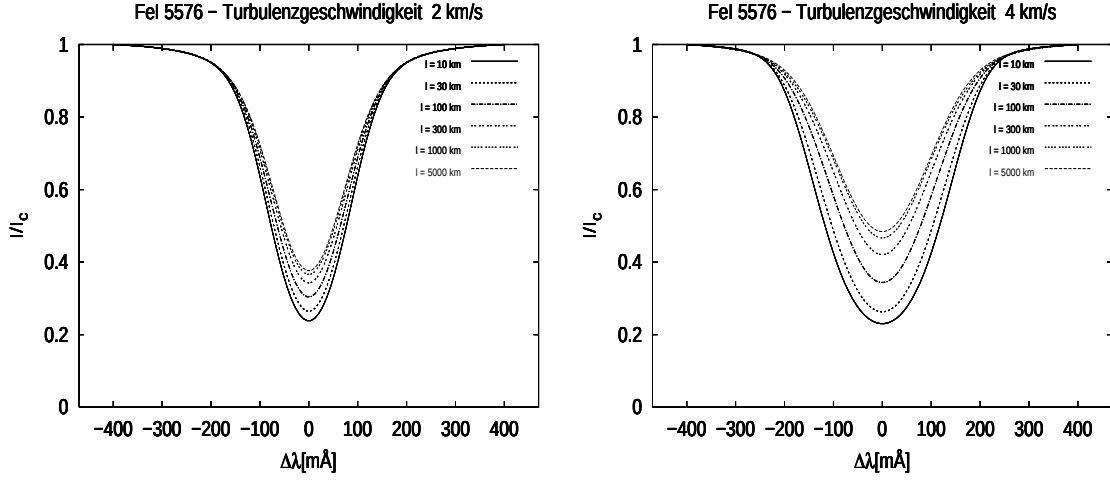


Abb. 6.1: Darstellung der Profilform in Abhängigkeit von der Korrelationslänge l . Die Intensität ist normiert auf das lokale Kontinuum I_c . Links die Darstellung der Profilformen für einen Turbulenzparameter $\xi_{meso} = 2 \text{ km/s}$ und in der rechten Darstellung für $\xi_{meso} = 4 \text{ km/s}$.

die Strukturlänge in statistischer Weise in die stochastische Transportgleichung eingeht. Das bedeutet, dass für die atmosphärischen Strukturen jede mögliche Kombination der Anordnung innerhalb der Atmosphäre durch die stochastische Transportgleichung bereits berücksichtigt wurde, um so den Erwartungswert des Linienprofils zu berechnen.

Die Erklärung für den Effekt der abnehmenden Äquivalenzbreite bei zunehmender Korrelationslänge folgt unmittelbar aus Gleichung (3.74) und den Grenzbetrachtungen aus Abschnitt 4.2. Bei sehr kleinen strukturellen Ausdehnungen ist die Fluktuationsrate der Photonen sehr hoch, und die Absorption ist schon für eine kleine Wegstrecke und ver-

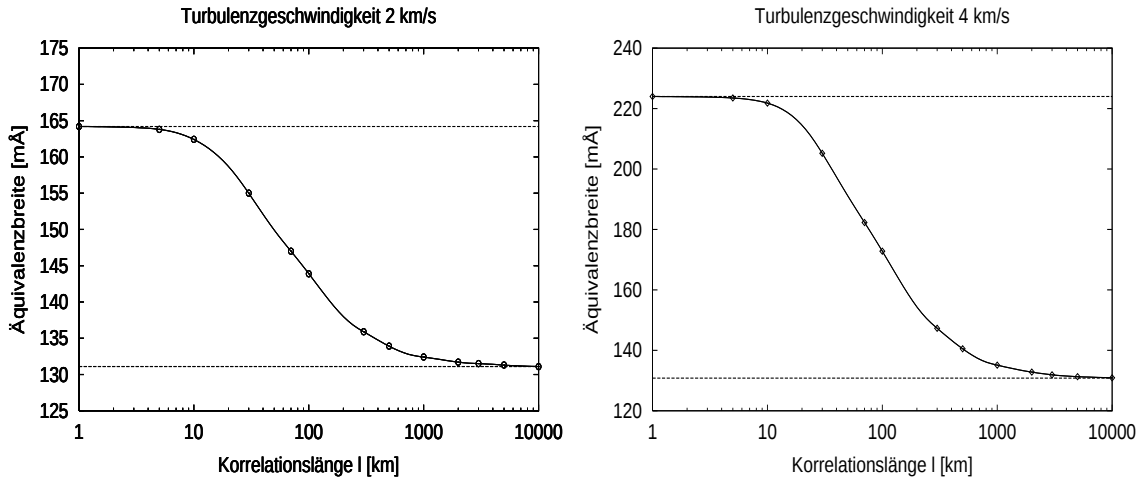


Abb. 6.2: Darstellung der Äquivalenzbreite in Abhängigkeit von der Korrelationslänge l . In der linken Darstellung ist der Verlauf der Äquivalenzbreite mit zunehmender Korrelationslänge aufgetragen für einen Turbulenzparameter $\xi_{meso} = 2 \text{ km/s}$ und rechts der Verlauf mit einem Turbulenzparameter $\xi_{meso} = 4 \text{ km/s}$. Die beiden horizontalen Linien kennzeichnen die Äquivalenzbreite eines Profils, das bei sonst gleichen Bedingungen für den konventionell berechneten makroturbulenten Fall (untere horizontale Linie) und für den mikroturbulenten Fall (obere horizontale Linie) berechnet wurde.

nachlässigbare Veränderung der physikalischen Parameter auf viele verschiedene Strukturen mit unterschiedlicher Geschwindigkeiten verteilt. Dies erreicht im Grenzfall $l \rightarrow 0$ seine maximale Verteilung gemäß der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichte. Im Gegensatz dazu werden bei zunehmender Korrelationslänge die unterschiedlichen Regime mit ihren jeweils gültigen Geschwindigkeiten mehr und mehr voneinander entkoppelt (siehe Gleichung (6.5)), so dass immer größere Teile des bedingten Spektrums in einem Regime bzw. in einer Struktur unbeeinflusst voneinander entstehen können. Diese erreichen für sehr große Korrelationslängen, $l \rightarrow \infty$, ihre maximale Entkopplung, sodass die bedingten Stokes-Spektren im makroturbulenten Regime entstehen. Diese Sättigung bzw. Konvergenz für kleine Korrelationslängen gegen den mikroturbulenten Fall und für große Korrelationslängen gegen den makroturbulenten Fall ist auch sehr gut in Abbildung 6.2 zu erkennen, wo die Äquivalenzbreiten als Funktion der Korrelationslänge für zwei unterschiedliche Streuparameter aufgetragen sind.

Insbesondere zeigt sich auch hier sehr deutlich, wie Strukturlängen $l \leq 10$ km als effektiv mikroturbulent und Strukturen ab ca. $l \geq 1000$ km als effektiv makroturbulent betrachtet werden können. Die horizontalen Linien in 6.2 kennzeichnen hierbei die durch die konventionelle Methode berechneten Äquivalenzbreiten des mikroturbulenten (obere horizontale Linie) bzw. des makroturbulenten Linienprofils (untere horizontale Linie). Aus beiden Darstellungen zeigt sich aber auch sehr deutlich, dass ein großer Bereich von Strukturausdehnungen existiert, $10 \leq l \leq 1000$, für den sowohl der mikroturbulente als auch der makroturbulente Grenzfall keine geeignete Beschreibung ermöglicht. Diese Ergebnisse stehen in sehr guter qualitativer wie auch quantitativer Übereinstimmung mit den von Gail & Sedlmayr (1974) und Gail et al. (1974) gemachten Untersuchungen zum Einfluss einer Mesoturbulenz auf beobachtbare Linienprofile. Es gilt weiterhin zu beachten, dass die resultierende Profilform auch von der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion abhängt. Gerade der hier entwickelte stochastische Strahlungstransport ermöglicht die Verwendung unterschiedlichster Wahrscheinlichkeitsdichten, was insbesondere bei der Suche nach möglichen Ursachen einen wesentlichen Vorteil gegenüber der mikroturbulenten als auch makroturbulenten Beschreibung verschafft.

Kapitel 7

Ein mesoturbulentes magnetisches Gebiet

In diesem Kapitel wird anhand der magnetisch sensitiven Absorptionslinie Fe I 6302 Å, die Bedeutung einer endlicher Ausdehnung von Magnetfeldstrukturen an einem einfachen Modell einer stochastischen 2-Komponenten-Atmosphäre untersucht. Dabei wird besonderen Wert auf die Netto-Zirkular-Polarisation gelegt, die sich besonders gut zur Untersuchung der Korrelationseffekte eignet, da diese allein durch Veränderungen entlang der Sichtlinie beeinflusst wird. Weiterhin soll gezeigt werden, wie sich gerade für Mesostrukturen, Abweichungen vom konventionellen Bild einer magnetisch mikro- bzw. makrostrukturierten Atmosphäre ergeben.

7.1 Modellbeschreibung

Im Gegensatz zu der herkömmlichen Modellierung einer 2-Komponenten-Atmosphäre wird nun angenommen, dass der Aufbau der Atmosphäre stochastischer Natur ist, d.h. die zwei Strukturelemente (Komponenten) der Atmosphäre bilden ein beliebiges fluktuierendes Ensemble. Das 2-Komponenten-Modell besteht aus einer unmagnetischen sowie einer magnetischen Komponente, welche sich durch das Modell einer dünnen magnetischen Flussröhre beschreiben lassen soll. Die Annahme einer dünnen magnetischen Flussröhre erlaubt es, einige Beziehungen zwischen den magnetischen und unmagnetischen Strukturen unmittelbar anzugeben. Dabei gilt für die magnetischen Strukturen, dass die Magnetfeldstärke allein eine Funktion der geometrischen Höhe ist (Spruit, 1981). Weiterhin gilt, wenn die Längenausdehnung entlang der Flussröhrenachse viel größer ist als der Durchmesser der Strukturen, dass das horizontale Druckgleichgewicht für jede geometrische Höhe z ausgedrückt werden kann durch

$$P_{unmag} = P_{mag} + \frac{B^2(z)}{8\pi} . \quad (7.1)$$

Dabei sind P_{unmag} und P_{mag} die Gesamtgasdrücke im magnetisiertem bzw. im unmagnetisiertem Medium. Weiterhin ist B die Feldstärke in der magnetischen Struktur. Für beide

Komponenten gilt, dass diese sich ebenfalls im hydrostatischen Gleichgewicht befinden, sodass der Druck $P(z)$ in der geometrischen Höhe z gegeben ist durch

$$P(z) = P(z_0) e^{\frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{\bar{\mu}(z')}{T(z')} dz'} . \quad (7.2)$$

Hierbei sind $P(z_0)$ der als bekannt vorausgesetzte Gasdruck bei einer Referenzhöhe z_0 , g die Gravitationsbeschleunigung, R die Gaskonstante, $T(z)$ die Temperatur und $\bar{\mu}(z)$ das effektive Molekulargewicht.

Da wir uns im folgenden zunächst auf kleinskalige magnetische Strukturen konzentrieren wollen, wird für die folgende Modellrechnung die Annahme gemacht, dass beide atmosphärische Komponenten durch dieselbe Temperaturschichtung beschrieben werden können. Dies stellt für kleine Strukturen eine durchaus zulässige Annahme dar, da kleinskalige Temperaturfluktuationen in einem solchen Regime in sehr kurzer Zeit durch strahlungsbedingten Wärmeaustausch ausgeglichen werden (Stix, 1989; Kneer & Trujillio Bueno, 1987; Spiegel, 1957). Als Temperaturschichtung nehmen wir für die folgenden Modellrechnungen das Temperaturmodell von Holweger & Müller (1974) an. Die ruhigen Strukturen erhalten zusätzlich die aus diesem Modell folgende Druckschichtung. Unter der Annahme einer einzigen gültigen Temperaturschichtung kann für die Dichte ρ_{mag} in den magnetischen Strukturen mit der magnetischen Feldstärke B folgende Beziehung aus (7.1) hergeleitet werden:

$$\rho_{mag} = \rho_{unmag} \left(1 - \frac{B^2}{P_{mag} 8\pi} \right) . \quad (7.3)$$

Dabei ist ρ_{unmag} die Dichte der unmagnetisierten Strukturen. Nun kann eine beliebige Magnetfeldstärke bei einer Referenzhöhe innerhalb der magnetisierten Komponenten angegeben werden. Durch die Randbedingungen (7.1) und (7.2) ergibt sich daraus dann die weitere Schichtung der Magnetfeldstärke, des Druckes und der Dichte der beteiligten Strukturen. Die Erhaltung des magnetischen Flusses setzt die Magnetfeldstärke mit dem Durchmesser der Strukturen für jede geometrische Höhe miteinander in Beziehung. Dies hat im stochastischen Formalismus direkten Einfluss auf die Korrelationslänge. Aufgrund der Tatsache, dass die Fläche proportional zum Quadrat der Strukturlänge ist und die Aufweitung der Strukturen in dem zur Linienentstehung beitragenden Gebiet nicht zu groß ist, soll diese Veränderung der Korrelationslänge zunächst vernachlässigt werden.

Die folgende Modellrechnung wird für die Eisenlinie Fe I 6302 Å durchgeführt. Es wird eine Magnetfeldstärke von 1100 Gauss bei einer optischen Tiefe von $\tau_{5000} = 1$ (bezogen auf die ruhigen Strukturen) angenommen. Diese optische Tiefe definiert dann im weiteren auch die geometrische Referenzhöhe $z_0 = 0$ der Atmosphäre. Desweiteren soll eine Beobachtung unter einem heliozentrischen Winkel von 20° angenommen werden. Um einer Beobachtung in einem magnetischen Netzwerkgebiet nahe zu kommen, sollen die unmagnetischen Strukturen gegenüber den magnetisierten Strukturen eine abwärtsgerichtete Sichtlinienkomponente der Geschwindigkeit von 1,5 km aufweisen. Es sei auch hier nochmals darauf hingewiesen, dass keine mikro- bzw. makroturbulenten Geschwindigkeitsfelder spezifiziert werden, denn diese ergeben sich in dem stochastischen Formalismus allein aus der Korrelationslänge.

Da sich die Atmosphäre nun durch ein Ensemble von Strukturen zusammensetzt die sich ihrerseits aus 2 verschiedenen Komponenten ergeben, ist der betrachtete Zustandsraum in

dieser Modellrechnung ebenfalls durch zwei diskrete Zustände charakterisiert. Die beiden atmosphärischen Komponenten bzw. Zustände werden in der Schreibweise aus Kapitel 3 somit als $\mathbf{B}_{unmag}^*$ und $\mathbf{B}_{mag}^*$ bezeichnet. Die globalen und diskreten Wahrscheinlichkeiten $p(\mathbf{B}_{unmag}^*)$ und $p(\mathbf{B}_{mag}^*)$ der Zustände werden zunächst gemeinsam auf 0.5 festgesetzt. Beide Strukturen sind somit in der Atmosphäre mit gleicher Wahrscheinlichkeit anzutreffen. Die Annahme eines so großen magnetischen Füllfaktors ist zwar oftmals nur in sehr aktiven Plage-Gebieten vorzufinden (Bellot Rubio et al., 2000), dennoch lassen sich die folgenden Ergebnisse auch auf Gebiete mit kleineren magnetischen Füllfaktoren verallgemeinern. Der Anfangswert für die einzelnen bedingten Stokes-Vektoren wird gemäß der Beziehung (5.13) festgelegt.

7.2 Ergebnisse

Die mit Hilfe der Modellannahmen und auf der Basis des numerischen Verfahrens aus Kapitel 5 berechneten Stokes-I- und Stokes-V-Profilen sind in den folgenden Abbildungen 7.1 bis 7.5 für die Korrelationslängen $l = 1000$ km, $l = 500$ km, $l = 100$ km, $l = 50$ km und $l = 10$ km abgebildet. Auch hier sei nochmals darauf hingewiesen, dass, obwohl eine Korrelationslänge von 1000 km weitaus größer ist als der Entstehungsbereich der Spektrallinie (200 km - 300 km), die mittlere Ausdehnung der Strukturen in einer statistischen Weise in die stochastische Transportgleichung eingehen. Die stochastische Transportgleichung für den beobachtbaren Erwartungswert des Stokes-Vektors berücksichtigt dabei jede mögliche Kombination der Anordnungen der atmosphärischen Strukturen innerhalb der Atmosphäre.

Deutlich zeigt sich hier der Einfluss der Korrelationslänge auf die Stokes-Profile, dabei sind diese für die Stokes-V-Profile sehr ausgeprägt. Bei einer Korrelationslänge von $l = 1000$ km erscheint das Stokes-V-Profil weitgehend symmetrisch und unterscheidet sich kaum (siehe unten) von einem unter makroturbulenten Bedingungen entstehenden Stokes-Profil. Für weiter abnehmende Korrelationslängen wird jedoch das Stokes-V-Profil mehr und mehr asymmetrisch. Dies äußert sich auch in den Werten der Netto-Zirkular-Polarisation (NCP) sowie deren Verlauf mit der Korrelationslänge l , siehe auch Abbildung 7.7.

Die Ursache dieses Verhaltens lässt sich leicht anhand der stochastischen Grundgleichung des polarisierten Strahlungstransports (3.70) verstehen. Während für sehr große Korrelationslängen die beiden statistischen Komponenten kaum miteinander wechselwirken, können die jeweiligen bedingten Stokes-Profile $\mathbf{Y}_{mag}(s)$ und $\mathbf{Y}_{unmag}(s)$ weitgehend unbeeinflusst voneinander entstehen, d.h. Photonen bleiben lange Zeit in einem atmosphärischen Regime mit nur sehr seltenen Übergängen in andere Strukturen. Die somit fast im makroturbulenten Grenzfall entstehenden bedingten Stokes-Profile werden dann erst durch die Erwartungswertbildung (3.78) miteinander gekoppelt und erzeugen so das observable Stokes-Profil. Wie in Abschnitt 4.2 bereits gezeigt wurde, gilt für den Grenzfall $l \rightarrow \infty$ die Äquivalenz der stochastischen Transportgleichung mit dem makroturbulenten Fall. Effektiv tritt dieser Übergang jedoch weitaus früher ein, sodass das Stokes-Profil bei einer Strukturgröße von 1000 km schon weitgehend dem makroturbulenten Fall entspricht, siehe auch Abbildung 7.7. Mit abnehmender Korrelationslänge hingegen gewinnen nun die beiden statistischen Terme in Gleichung (3.70) an Bedeutung, sodass die bedingten Stokes-Profile sich mehr und mehr während des Entstehungsprozesses gegenseitig beeinflussen. Im Stokes-V-Profil zeigt sich dies dadurch, dass die rotverschobene σ -Komponente des Stokes-V-Profils mit

abnehmender Korrelationslänge kleiner und deformierter wird. Hier zeigt sich der immer größer werdende Einfluss des Absorptionsverhaltens aus den unmagnetischen Strukturen. Da für diese Strukturen eine abwärts gerichtete Geschwindigkeitskomponente entlang der Sichtlinie angenommen wurde, ist die dadurch ebenfalls rotverschobene Absorption der Eisenlinie in der Lage, die in den magnetischen Strukturen entstehenden roten σ -Komponenten des Stokes-V-Profiles mehr und mehr bei deren Entwicklung zu beeinflussen. Dabei wird den roten σ -Komponenten ein großer Teil der verfügbaren Intensität, durch die Absorption in den unmagnetischen Strukturen, entzogen. In gleicher Weise trägt dieser Prozess jedoch auch zu einem Anwachsen der *ungestörten* blauen σ -Komponente für kleine Korrelationslängen bei.

Die durch einen Übergang von einem in ein anderes Regime auftretende Asymmetrie in Form der Netto-Zirkular-Polarisation wurde bereits in ihren Grundzügen in Abschnitt 4.3.3 besprochen. Da im Falle einer schnell fluktuierenden (stochastischen) Atmosphäre vermehrt Übergänge auftreten, akkumuliert sich dieser Effekt (siehe auch Gleichung (4.41)), sodass es zu einer verstärkten Ausbildung asymmetrischer Profile in Abhängigkeit von

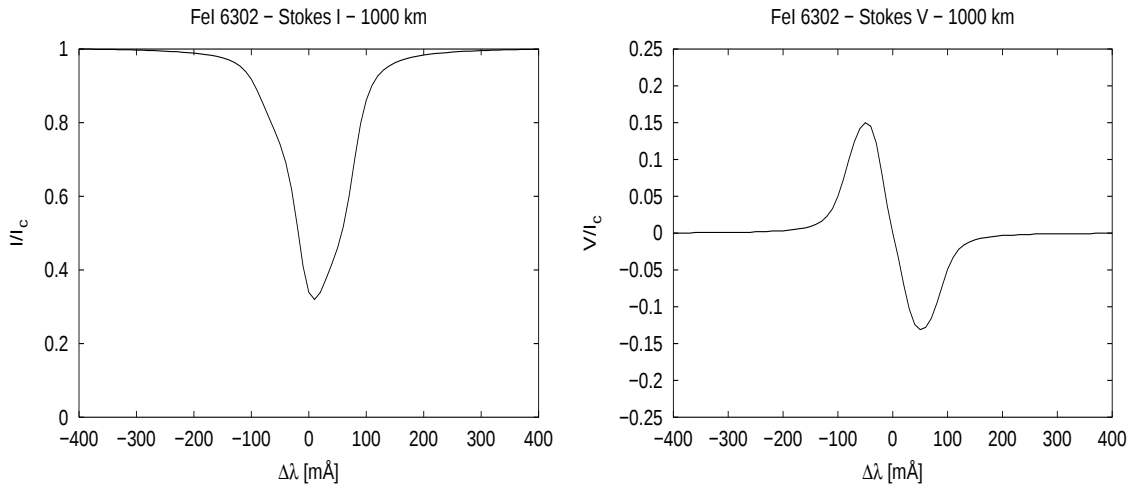


Abb. 7.1: Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 1000$ km.

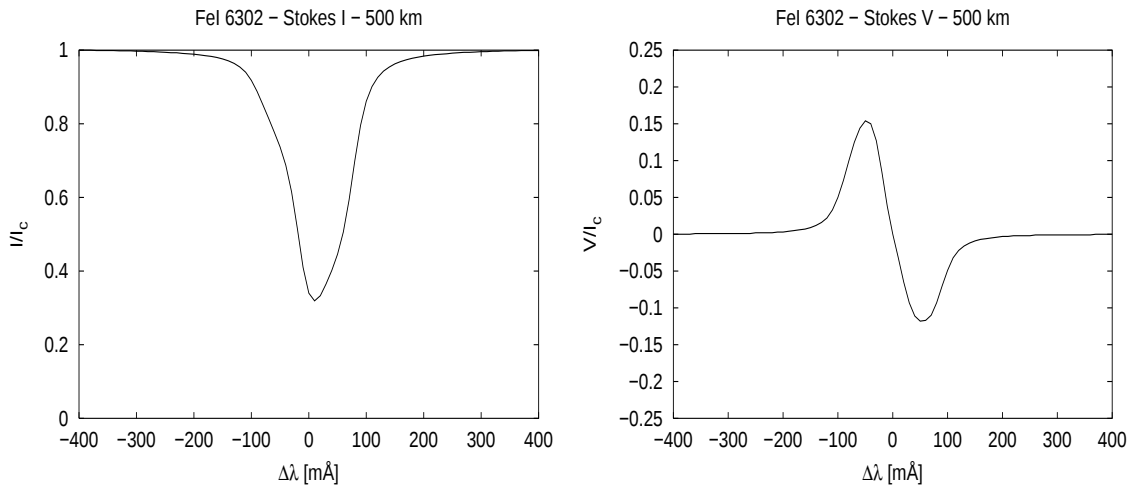


Abb. 7.2: Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 500$ km.

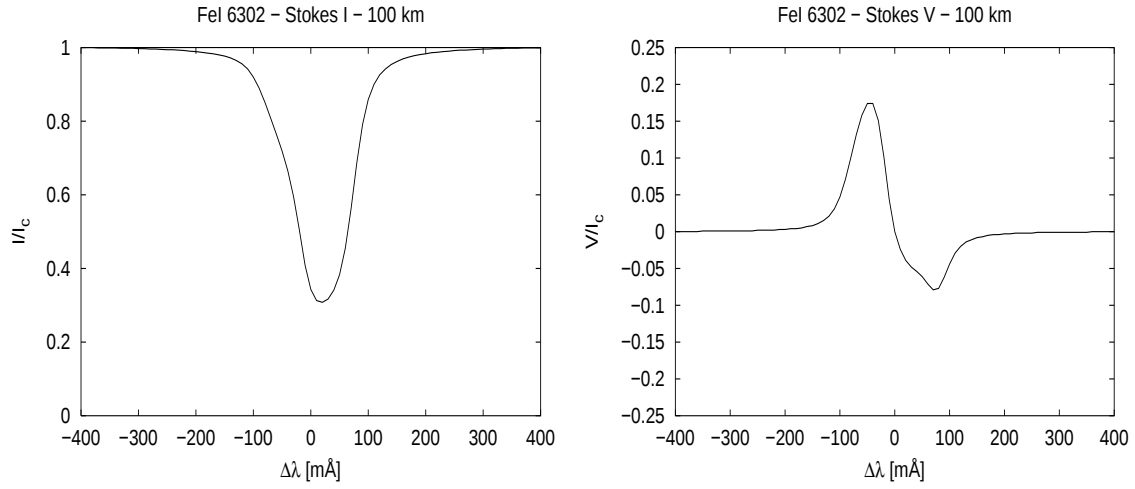


Abb. 7.3: Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 100$ km.

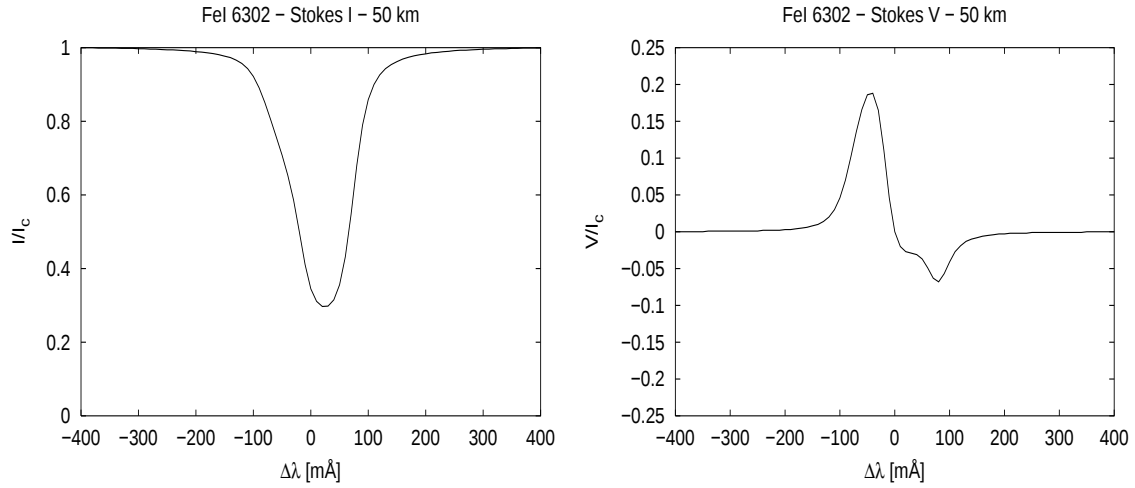


Abb. 7.4: Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 50$ km.

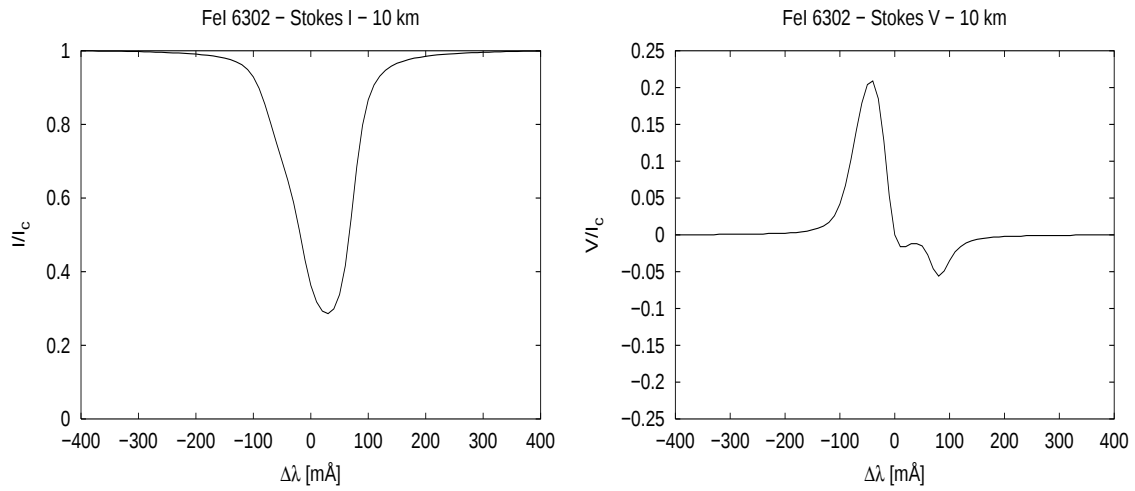


Abb. 7.5: Darstellung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für eine Korrelationslänge $l = 10$ km.

der Korrelationslänge kommt. Dieser Effekt erreicht sein Maximum beim Erreichen einer mikroturbulenten Struktur.

Der Übergang des stochastischen mesostrukturierten Ansatzes (MESMA) für eine Korrelationslänge mit $l \rightarrow 0$ zum mikrostrukturierten Ansatz (MISMA) von Sanchez Almeida et al. (1996) wurde theoretisch bereits in Abschnitt 4.2 untersucht, hier soll nochmals kurz dargestellt werden, dass ein solcher Übergang zwischen mikrostrukturiertem und mesostrukturiertem Fall numerisch bereits bei einer endlichen Korrelationslänge stattfindet. Dazu werden zum einen, aufbauend auf den Modellparametern der oben beschriebenen Atmosphäre, die Mittelwerte aus den beteiligten Absorptionsmatrizen und der Quellvektoren gebildet, um entsprechend den Gleichungen aus dem Abschnitt 4.2 eine magnetisch mikrostrukturierte Atmosphäre gemäß des MISMA-Modells von Sanchez Almeida et al. (1996) zu simulieren. Zum anderen wird auf der Basis des stochastischen Strahlungstransports eine mesostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von 10 km simuliert. In der Abbildung 7.6 sind die Stokes-I- und Stokes-V-Profile für beide Berechnungsarten dargestellt. Es zeigt sich, dass der hier entwickelte MESMA-Ansatz für einer Korrelationslänge von etwa 10 km das Verhalten einer magnetisch mikrostrukturierten Atmosphäre erreicht, sodass zwischen den beiden Stokes-V-Profilen kaum Unterschiede erkennbar sind. Man beachtet jedoch, dass schon für kleine Veränderungen hin zu größeren Korrelationslängen eine nicht unerhebliche Abweichung vom mikrostrukturierten Fall auftritt (siehe auch Darstellungen und Erläuterungen weiter unten).

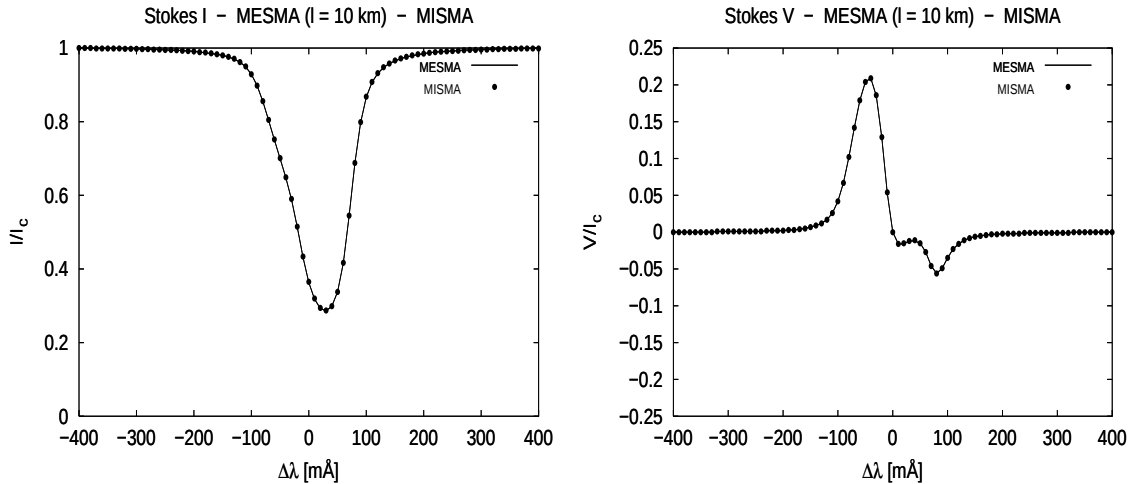


Abb. 7.6: Darstellung der Stokes I und Stokes V Profile, berechnet unter dem stochastischen mesostrukturierten Ansatz mit einer Korrelationslänge $l = 10$ km (durchgezogene Linie) und unter dem mikrostrukturierten Grenzfall, MISMA (gepunktete Linie).

Eine weitere Eigenschaft die in den Abbildungen 7.1 bis 7.5 auffällt ist das Verhalten des Stokes-I-Profiles mit Änderung der Korrelationslänge. Hier zeigt sich bei sehr großen Korrelationslängen eine Verformung der Profile, welche sich mit der Abnahme der Korrelationslänge abschwächt. Dies liegt zum einen an der Wahl der atmosphärischen Parameter für die beiden Komponententypen der Atmosphäre, zum anderen an der stetig zunehmenden Beeinflussung und Durchmischung der beiden bedingten Stokes-Profile mit abnehmender Korrelationslänge. Wie auch aus Abbildung 7.8 für die statistische Streuwahrscheinlichkeit deutlich wird, erreichen mit abnehmender Korrelationslänge zunächst die Linienzentren und später bei weiterer Abnahme der Korrelationslänge auch die Linienflügel der Profile,

ein mikroturbulentes Verhalten. Durch die Vorgabe einer diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $p(\mathbf{B}_{unmag}^*)$ und $p(\mathbf{B}_{mag}^*)$ ergibt sich so ein augenscheinlich, homogeneres Profil für kleinere Korrelationslängen.

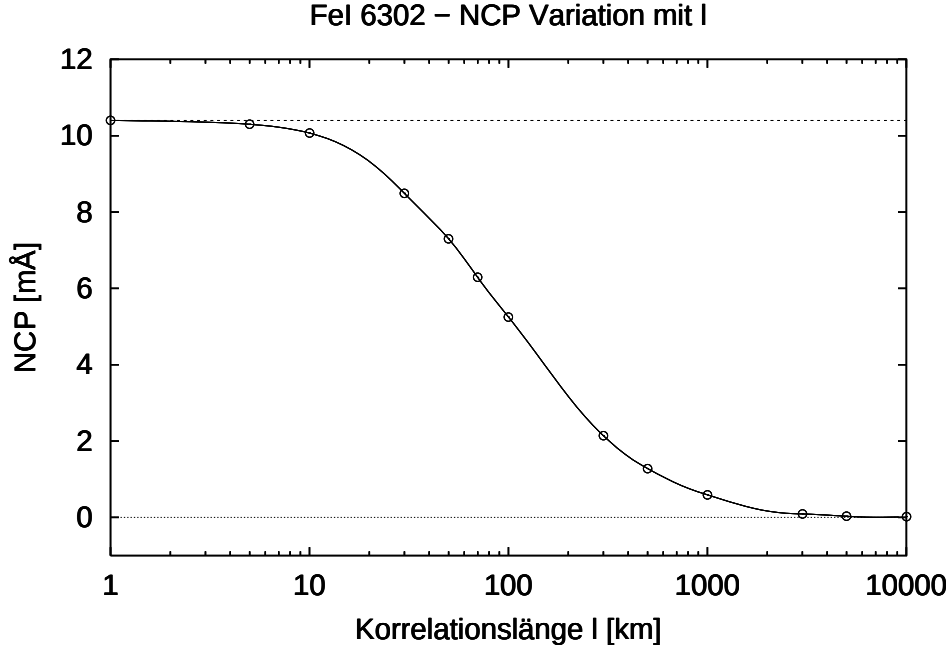


Abb. 7.7: Abhängigkeit der Netto-Zirkular-Polarisation (NCP) von der Korrelationslänge l . Die obere horizontale Linie gibt die NCP an, wie sie sich aus der Berechnung für den mikrostrukturierten Grenzfall ergibt, während die untere horizontale Linie die NCP des makrostrukturierten Grenzfalles darstellt.

In der Abbildungen 7.7 wird sehr gut deutlich, wie die Asymmetrie der Stokes-Profile, ausgedrückt durch die Netto-Zirkular-Polarisation, von der Korrelationslänge abhängt. Für sehr große Korrelationslängen geht die Netto-Zirkularpolarisation gegen Null. Ein Effekt, der durch die Ableitung im Abschnitt 4.3.3 über die Entstehung der Netto-Zirkular-Polarisation verständlich wird. Der Einfluss der Netto-Zirkular-Polarisation ist um so ausgeprägter, je kleiner die Korrelationslänge ist, und schwächt sich auf der anderen Seite für größere Korrelationslängen ab. Es zeigt sich aus Abbildung 7.7 dass ab einer Korrelationslänge von ca. 10 km, die resultierende Netto-Zirkular-Polarisation dem des mikroturbulenten Falles entspricht. Die obere horizontale Linie markiert dabei die Netto-Zirkular-Polarisation, wie sie unter der Methode der magnetisch mikroturbulenten Atmosphäre (MISMA) berechnet wurde. Es zeigt sich weiterhin der rapide Abfall der Netto-Zirkular-Polarisation bereits für Strukturen mit einer Korrelationslänge oberhalb von 10 km. Dieses Verhalten setzt sich fort bis zu einer Korrelationslänge von ca. 1000 km, wo sich die Veränderung abschwächt und langsam gegen Null strebt. So können Strukturen mit einer Korrelationslänge ab ca. 1000 km als effektiv makroturbulent angesehen werden. Die horizontale Nulllinie in Abbildung 7.7 markiert die Netto-Zirkular-Polarisation wie sie sich aus dem makroturbulenten Grenzfall ergibt.

Um abschätzen zu können, welche Relevanz die durch die Korrelationslänge beeinflusste statistische Streuung gegenüber dem Prozess der wahren Absorption bzw. Thermalisierung hat, soll im folgenden die Streuwahrscheinlichkeit definiert werden. Mit Hilfe des Korrela-

tionskoeffizienten $\kappa_{cor} = l^{-1}$, des Linienabsorptionskoeffizienten κ_l sowie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten κ_c kann die Wahrscheinlichkeit der statistischen Streuung in Relation zur Gesamtwechselwirkungswahrscheinlichkeit durch folgende Beziehung ausgedrückt werden:

$$P_{st}(\tau) = \frac{\kappa_{cor}(\tau)}{\kappa_{cor}(\tau) + \kappa_c(\tau) + \kappa_l(\tau)} . \quad (7.4)$$

Die Gleichung (7.4) beschreibt so das Verhältnis der Übergangsereignisse (Streuung) pro cm zur der Gesamtzahl der Wechselwirkungsereignisse pro cm (wahre Absorption und statistische Streuung) eines Photons für jede optische Tiefe τ . Die Darstellung 7.8 der

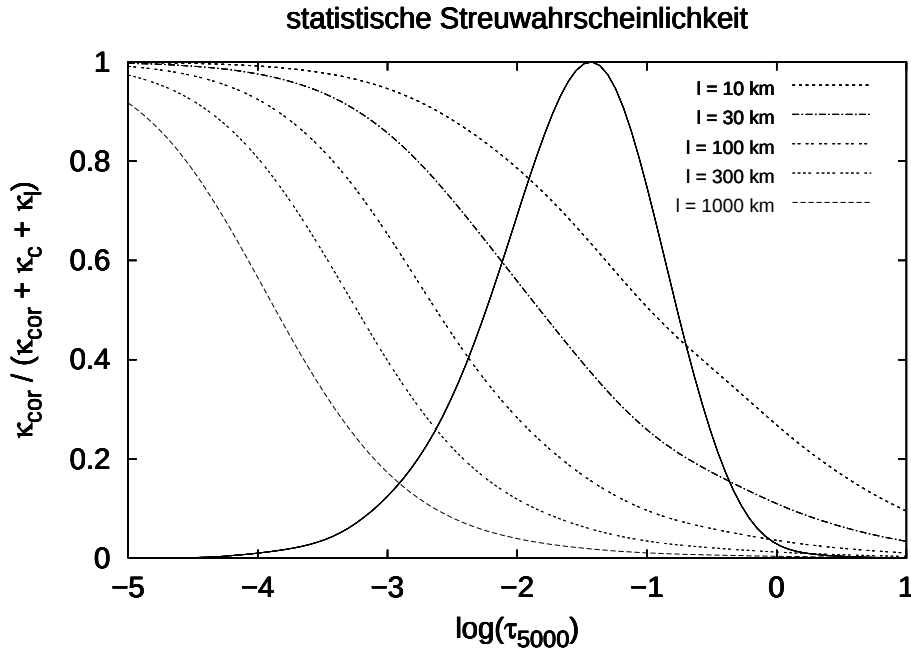


Abb. 7.8: Darstellung der Streuwahrscheinlichkeit für verschiedene Korrelationslängen l über die logarithmische optische Tiefe τ bei 5000 Å, bezogen auf die unmagnetische Atmosphäre. Im Hintergrund, mit durchgezogener Linie ist die Beitragsfunktion für das Wellenlängenzentrum dargestellt.

Streuwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der optischen Tiefe τ_{5000} erlaubt es zu erkennen, welche Art der Absorption in welchen atmosphärischen Schichten dominierend ist. Dabei sind die statistischen Streuwahrscheinlichkeiten hier auf die unmagnetischen Strukturen bezogen dargestellt. Die statistischen Streuwahrscheinlichkeiten innerhalb der magnetischen Strukturen zeigen qualitativ dasselbe Verhalten. Zur besseren Orientierung des relevanten Entstehungsbereiches ist im Hintergrund für die verwendete Spektrallinie, die Beitragsfunktion der unmagnetischen Komponente für das Wellenlängenzentrum dargestellt. Sehr gut ist hier zu erkennen, dass die statistische Streuung für Korrelationslängen von 10 km schon in sehr niedrigen Schichten von Bedeutung ist und während des ganzen Entstehungsprozesses der Spektrallinie dominiert. Je größer jedoch die Korrelationslänge ist, desto später gewinnt die statistische Streuung im Entwicklungsprozess der Linie an Bedeutung. Für kleine Korrelationslängen ist die Wahrscheinlichkeit der statistischen Streuung in Bereichen mit hoher Beitragsamplitude viel größer als die der wahren Absorption,

d.h. ein Photon wechselt mehrmals das atmosphärische Regime, bevor es letztendlich thermalisiert wird. Dadurch findet eine nahezu perfekte Mischung statt, d.h. das Photon wird 'wirklich' zufällig in einem der vielen zur Verfügung stehenden Regime absorbiert bzw. kann aus einem solchen entweichen.

Man erkennt weiterhin aus Abbildung 7.8, wie schnell sich die Verläufe der statistischen Streuwahrscheinlichkeiten verändern. Schon für eine Korrelationslänge von 100 km ist die statistische Streuung auf die oberen Entstehungsbereiche der Spektrallinie beschränkt, um dann für Korrelationslängen ab 1000 km kaum noch Einfluss auf das resultierende Stokes-Spektrum zu haben.

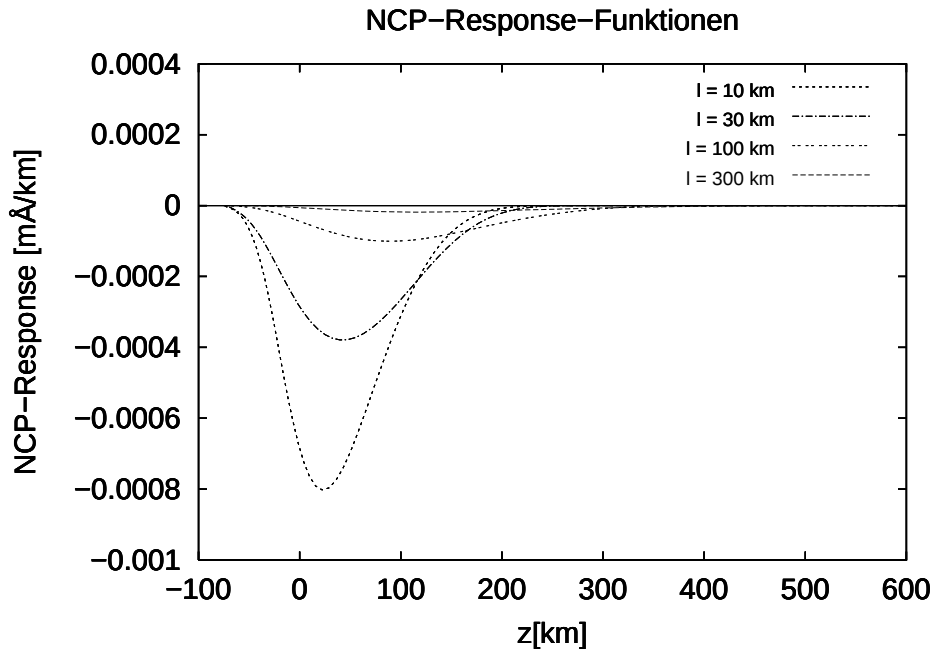


Abb. 7.9: Netto-Zirkular-Polarisations-Response-Funktion für verschiedene Korrelationslängen l , aufgetragen über der geometrischen Höhe z , wobei der Nullpunkt $z = 0$ innerhalb der unmagnetischen Komponente bei $\log(\tau_{5000}) = 0$ festgelegt wurde.

Die Darstellungen in 7.7 und 7.8 machen nicht nur deutlich wie schnell sich die Form der Stokes-Profil und die Linienparameter mit zunehmender Korrelationslänge verändern, sondern auch, wie schnell die Annahme der mikrostrukturierten magnetischen Atmosphäre (MISMA) sich als unangemessene Beschreibung des Strahlungstransports erweist, sobald Korrelationslängen über 10 km erreicht werden.

Die rapide Veränderung sowie die Auswirkungen auf die Stokes-Profile beim Übergang von einer mikrostrukturierten in eine mesostrukturierte Atmosphäre werden auch anhand der Abbildung 7.9 deutlich. Hier ist die Netto-Zirkular-Polarisations-Response-Funktion bezüglich der Korrelationslänge dargestellt, also die Funktion, die die Veränderung der Netto-Zirkular-Polarisation, bedingt durch die Reaktion des Stokes-V-Profiles über den gesamten Wellenlängenbereich, aufgrund einer gleichmässigen kleinen Veränderung der Korrelationslänge in allen Höhenbereichen beschreibt. Diese Response-Funktionen wurden gemäß der in Abschnitt 4.4 hergeleiteten Gleichungen und der Definition der Netto-

Zirkular-Polarisation (4.22) berechnet. Die Berechnungen erfolgten unter den oben beschriebenen atmosphärischen Bedingungen. Zunächst zeigt sich in der Abbildung, dass alle Response-Funktionen negativ sind, dies entspricht der Berechnung für eine positive Veränderung bzw. der Ableitung der erweiterten Absorptionsmatrix (3.75) und des erweiterten Emissionsvektors (3.76) nach der Korrelationslänge l . Die Response-Funktionen zeigen also richtig an, dass bei einer Zunahme der Korrelationslänge, die resultierende Veränderung der Netto-Zirkular-Polarisation negativ ist. Es zeigt sich weiterhin, dass die Response-Funktionen für ein quasi-mikrostrukturiertes Regime mit einer Korrelationslänge von 10 oder weniger Kilometer die größte betragsmäßige Empfindlichkeit (Response) gegenüber einer Veränderung der Korrelationslänge l aufweisen. Die maximalen Amplituden der Response-Funktionen nehmen schnell mit steigender Korrelationslänge ab. So zeigt sich auch hier, dass gerade bei einer kleinskaligen Strukturierung der Atmosphäre die resultierenden Stokes-Profilen sehr empfindlich auf eine Veränderung der Strukturlänge reagieren. Ein weiterer interessanter Aspekt in Abbildung 7.9 ist die Tatsache, dass die Amplituden der Response-Funktionen mit abnehmender Korrelationslänge in tiefere geometrische Schichten wandern. Dies findet seine Erklärung durch einen Blick auf Abbildung 7.8, denn hier sehen wir, wie auch in sehr tiefen, zur Linie beitragenden Schichten, eine relativ hohe statistische Streuwahrscheinlichkeit besteht. Das bedeutet, dass mit abnehmender Korrelationslänge die tieferen Schichten des Linienentstehungsgebietes immer mehr von einer statistischen Durchmischung betroffen sind. So wirkt sich diese Veränderung insbesondere auf die Linienflügel aus, welche bei den vorgegebenen Modellparametern einen besonders großen Beitrag zur Veränderung der Netto-Zirkular-Polarisation liefern.

Es erweist sich somit auch hier, dass eine endliche Ausdehnung der atmosphärischen Strukturen, einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf den Prozess der Linienentstehung hat. Insbesondere bei der Bildung von asymmetrischen Profilen und der Netto-Zirkular-Polarisation, zeigen schon relativ kleine Veränderungen der Korrelationslänge auch unterhalb der mittleren freien Weglänge von Photonen (ca. 50-100 km bei $\tau_{5000} = 1$), einen deutlichen Effekt in den entstehenden Stokes-Profilen. Dies macht auch hier deutlich, dass die Annahme einer magnetisch mikrostrukturierten Atmosphäre, wie in dem MISMA-Modell von Sanchez Almeida et al. (1996) vorgeschlagen, nur einen relativ kleinen Anwendungsbereich besitzt und dass das hier entwickelte allgemeinere mesostrukturierte (MESMA) Modell eine angemessenere Beschreibung der atmosphärischen Strukturen und des Strahlungstransports erlaubt. Es sei noch darauf hingewiesen, dass wie beim MISMA-Modell auch innerhalb des stochastischen mesostrukturierten Ansatzes jede beliebige Asymmetrie der Stokes-Profilen erzeugt werden kann. Dies wird insbesondere nach dem in Abschnitt 4.2 gezeigten Grenzbetrachtungen deutlich, wonach das MISMA-Modell nur einen Spezialfall des hier entwickelten MESMA-Modells darstellt.

Kapitel 8

Zur Struktur der Penumbra

In diesem Abschnitt soll an einem einfachen stochastischen Modell einer penumbralen Struktur gezeigt werden, wie messbare Eigenschaften von den zugrundeliegenden Korrelationseigenschaften abhängen. Es wird also untersucht, wie *mikroskopische* Ursachen zu einem *makroskopisch* messbaren Effekt führen können.

Beobachtungen von Sonnenflecken in sichtbaren Wellenlängenbereichen zeigen eine hochgradige Strukturierung der Penumbra. Dabei ist nicht nur die Intensitätsfluktuation in Form radial verlaufender filamentartiger Strukturen auffällig, auch der von Evershed 1909 beschriebene und nach ihm benannte Evershed-Effekt, der die Wellenlängenverschiebung aufgrund eines weitgehend horizontal nach aussen gerichteten Materiestroms beschreibt, ist ein bei allen Sonnenflecken mit ausgebildeter Penumbra immer wieder deutlich messbarer Effekt. Zahlreiche Untersuchungen, die sich mit den vielen beobachtbaren Eigenschaften wie der Fluktuation der Intensität, des Magnetfeldes, der Geschwindigkeiten, sowie deren Korrelationen untereinander beschäftigten, konnten bereits eine Vielzahl von Informationen zutage fördern, doch immer noch ist ein theoretisches Modell, das allen beobachtbaren Eigenschaften Rechnung trägt, nicht verfügbar. Doch gibt es mittlerweile vielversprechende Ansätze wie z.B. das *Siphon-Flow-Modell* von Meyer & Schmidt (1968) oder das *Moving-Tube-Modell* von Schlichenmaier et al. (1998).

Bereits in den sechziger Jahren wurde aufgrund der Asymmetrie von Spektrallinien darauf geschlossen, dass kleinskalige, dünne Flusskanäle für diese gemessenen Asymmetrien verantwortlich sind (Maltby, 1964). In den letzten Jahren konnte sich, gestützt auf dem Siphon-Flow- bzw. dem Moving-Tube-Modells als auch aufgrund von Beobachtungen (Title et al., 1993; Rimmele, 1995; Schmidt & Schlichenmaier, 2000; Müller et al. 2002) die Modellvorstellung, dass kleinskalige, weitgehend horizontale flussröhrenartige Kanäle den Hauptbeitrag zum beobachtbaren Evershed-Effekt liefern, mehr und mehr durchsetzen.

Ein Schlüssel für das weitere physikalische Verständnis der Penumbra ist es, eine genauere Kenntniss der Feinstruktur zu erlangen. Da auch die theoretischen Modelle keine genaue Angabe über die Grösse der penumbralen Filamente erlauben, diese aber wesentlich für dessen Struktur und Dynamik sind (Schlichenmaier, 2002) können diese Parameter zunächst nur durch indirekte Methoden abgeschätzt werden. Aus hochaufgelösten Speckle-Rekonstruierten breitbandigen Filtergrammaufnahmen konnte Sütterlin (2001) die strukturelle Grösse der Filamente auf ca. 250 km abschätzen. Es gibt hingegen auch Abschätzungen von Sanchez Almeida (1998), basierend auf den indirekt ermittelten vertikalen Gradi-

enten der Magnetfeldinklination, die Anlass geben, eine Strukturierung von nur wenigen Kilometer Ausdehnung anzunehmen.

8.1 Mitte-Rand-Variation der NCP

Aufbauend auf dem von Solanki & Montavon (1993) vorgeschlagenen *Uncombed-Penumbral-Modell*, welches in letzterer Zeit häufig als Grundlage für die Beschreibung verschiedener flussröhrenartiger Modelle verwendet wurde (Martinez Pillet, 2000; Müller et al., 2002), soll hier nun ein stochastisch fluktuierendes Modell einer Penumbra untersucht werden. Anhand dieses Modells soll ermittelt werden, wie sich die aus den Stokes-V-Profilen ergebende Netto-Zirkular-Polarisation in Abhängigkeit von der Position eines Sonnenflecks auf der Sonne ändert (Mitte-Rand-Variation). Motivation dabei ist, dass sich bei der Variation des Sichtwinkels, die Orientierung des Magnetfeldes relativ zum Beobachter und die Projektion der Strömungsgeschwindigkeit auf die Sichtlinie ändert und so die Netto-Zirkular-Polarisation in charakteristischer Weise vom heliozentrischen Winkel θ und den strukturellen Ausdehnungen der Strömungskanäle abhängt.

Der hier benutzte Ansatz zur Modellierung des penumbralen Magnetfeldes von Solanki & Montavon (1993) besteht im wesentlichen aus 2 magnetischen Komponenten. Dabei wird von einer gegen den lokalen Normalenvektor leicht geneigten magnetischen Hintergrundkomponente sowie einer darin eingebetteten Flussröhrenkomponente, die gegen den lokalen Normalenvektor fast horizontal ausgerichtet ist, ausgegangen. Die Neigung der Flussröhrenkomponente wird dabei immer größer als die der Hintergrundkomponente angenommen. In der räumlichen Vorstellung windet sich das Hintergrundfeld um die Flussröhren herum (Flusserhaltung). Dieses Modell soll nun derart verallgemeinert werden, dass im folgenden eine beliebige Fluktuation der beiden Komponenten zugelassen wird. In dem stochastischen Formalismus dieser Arbeit bedeutet dies nun, dass die Atmosphäre aus zwei fluktuierenden Komponenten besteht, mit festzulegenden Wahrscheinlichkeitswerten und Korrelationslängen. Man beachte hierbei den Unterschied zur Modellierung von Solanki & Montavon (1993), Martinez Pillet (2000) oder Müller et al. (2002), die eine quasi-statische Anordnung wählen, bei der die Flussröhrenkomponente in einer festen geometrische Höhe in der Atmosphäre angesiedelt ist und einen fest vorgegebenen Durchmesser besitzt.

Bei der Bestimmung der atmosphärischen Modellparameter für die Hintergrundkomponente wählen wir ähnlich wie Martinez Pillet (2000) für die Magnetfeldstärke die folgende funktionale Beziehung mit der optischen Dichte: $B = 1300 + 50 \log \tau_{5000}$. Die Inklination gegenüber dem lokalen Normalenvektor wird auf 55° festgelegt. Das Temperaturmodell der Hintergrundkomponente soll durch das semi-empirische Penumbra-Modell von Ding & Fang (1989) gegeben sein. Motiviert durch das Modell von Schlichenmaier et al. (1998) nehmen wir für die Hintergrundstrukturen eine verschwindende Geschwindigkeit an.

Für die Flussröhrenkomponente nehmen wir ähnlich dem vereinfachten Modell von Müller (2001) an, dass diese isotherm mit der Hintergrundkomponente ist, also dasselbe Temperaturmodell wie die Hintergrundkomponente besitzt. Die Flussstrukturen besitzen ebenfalls die gleiche Schichtung der Magnetfeldstärke wie die Hintergrundstrukturen. Die Neigung gegen den lokalen Normalenvektor beträgt für die Flussstrukturen 90° . Beide Strukturen stehen so miteinander im Temperatur- und Druckgleichgewicht.

Gemäß dem Modell von Schlichenmaier et al. (1998) gehen wir davon aus, dass der Hauptbeitrag zur Evershed-Strömung durch die magnetischen Flusskanäle erzeugt wird. Martinez Pillet (2000) benutzt einen auf spektroskopischen Messungen beruhenden Geschwindigkeitsbetrag von 2 km/s in den Flussröhren (Martinez Pillet, 1997), wohingegen Schlichenmaier et al. (2001) und Müller et al. (2002) aufgrund von Simulationsrechnungen auf der Basis des Moving-Tube-Modells, Geschwindigkeitsbeträge bis zu 12 km/s benutzen. Hier sollen nun neuere Ergebnisse von Bellot Rubio et al. (2003) einfließen, die durch Inversion von spektropolarimetrischen Daten auf der Basis eines 2-Komponenten-Modells gewonnen wurden. Diese ergaben für die geneigte Struktur, die den Hauptbeitrag zur Evershed-Strömung trägt, einen Geschwindigkeitsbetrag von bis zu 6.5 km/s. Darauf aufbauend nehmen wir in unserem Modell eine maximale Sichtliniengeschwindigkeit von $v = 6$ km/s für die Flussröhrenstrukturen an. Gemäß der Ergebnisse von Martinez Pillet (2000), der einen gleichgewichteten Füllfaktor für beide Komponenten angibt, setzen wir hier eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. einen Wahrscheinlichkeitswert von 0.5 für beide Komponenten in einer Höhe von $\tau = 1$ an, wobei die optische Tiefe τ in diesem Kapitel sich immer auf die Kontinuumswellenlänge bei 5000 Å bezieht. Um dem nachlassenden Einfluß der Flussröhrenkomponente mit ansteigender Höhe Rechnung zu tragen (Schlichenmaier, 2002) wird für die folgenden Modellrechnungen der Wahrscheinlichkeitswert als abhängig von der optischen Tiefe τ angesehen. Die funktionale Beziehung des Wahrscheinlichkeitswertes p_H für die Hintergrundkomponente in dem Intervall $\log(\tau) = [-5;0]$ gehorcht dabei der Beziehung $p_H = 0.5 - 0.1 \cdot \log(\tau)$. Entsprechend ist der Wahrscheinlichkeitswert p_F der Flussröhrenkomponente durch $p_F = 0.5 + 0.1 \cdot \log(\tau)$ gegeben. Aufgrund der rasch zunehmenden optischen Tiefe verbleiben die Wahrscheinlichkeitswerte beider Komponenten unterhalb von $\tau = 1$ bei 0.5. Mit diesem Modell, das bezüglich der atmosphärischen Parametern eine Kombination aus den Modellparametern von Martinez Pillet (2000) und Müller et al. (2002) darstellt, werden nun die Modellrechnungen für die Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation unter den Bedingungen einer stochastisch organisierten Atmosphäre durchgeführt.

Da sich die Korrelationslänge mit der Variation des heliozentrischen Winkels verändert und so der Bezug zur geometrischen Ausdehnung der Flusstrukturen verloren geht, beziehen sich die Angaben der Korrelationslänge im folgenden immer auf einen Einfall der Sichtlinie entlang des lokalen Normalenvektors. So bleibt, aufgrund der Ausrichtung der Flusstrukturen in unserem Modell, der Bezug auf die geometrische Ausdehnung erhalten.

8.2 Interpretation der Mitte-Rand-Variation

In den Abbildungen 8.1 und 8.2 sind zunächst die charakteristischen Kurvenverläufe der Netto-Zirkular-Polarisation in Abhängigkeit von dem heliozentrischen Winkel für verschiedene Korrelationslängen zu sehen. Der Verlauf jeder einzelnen Kurve mit dem heliozentrischen Winkel hängt maßgeblich von der Projektion der Strömungskanäle auf die Sichtlinie ab. Wir wollen uns hier jedoch in erster Linie der Variation der Kurvenverläufe mit der Korrelationslänge bzw. der mittleren Ausdehnung der Flusstrukturen (siehe Schlussbemerkung letzter Abschnitt) widmen. Anhand der Abbildungen 8.1 und 8.2 läßt sich deutlich der Effekt der zunehmenden Korrelationslänge l auf die beobachtbare Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation erkennen. Bereits für eine mittlere Strukturausdehnung von 100 km ergibt sich eine drastische Reduzierung der Netto-Zirkular-Polarisation. Schon bei einer Korrelationslänge von 300 km beträgt die resultierende

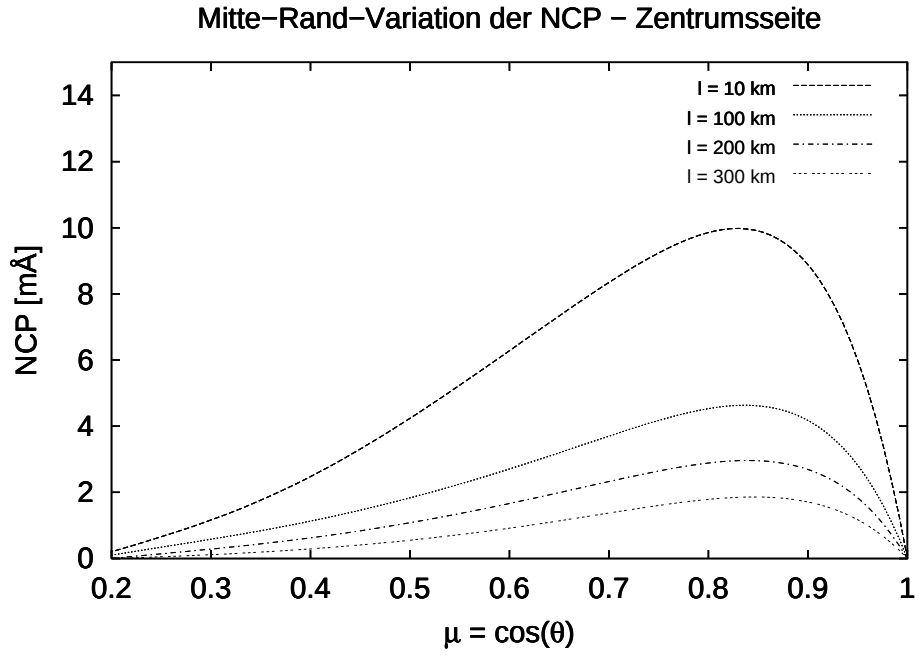


Abb. 8.1: Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation in Abhängigkeit vom Kosinus des heliozentrischen Winkels θ für verschiedene Korrelationslängen l bei Beobachtung der zentrumsseitigen Penumbra.

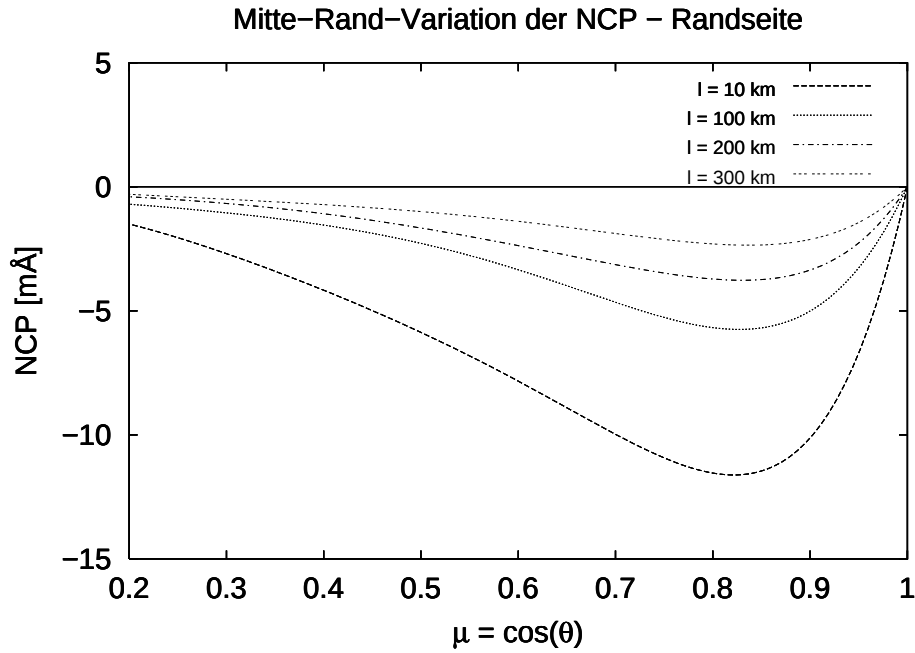


Abb. 8.2: Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation in Abhängigkeit vom Kosinus des heliozentrischen Winkels θ für verschiedene Korrelationslängen l bei Beobachtung der randseitigen Penumbra.

Netto-Zirkular-Polarisation nur noch knapp ein Fünftel derjenigen, die aus einer Korrelationslänge von 10 km resultiert. Der dabei zurgundeliegende Mechanismus der Entstehung einer Netto-Zirkular-Polarisation durch eine differentielle Geschwindigkeit der atmosphärischen Strukturen wurde bereits in Abschnitt 4.3.3 besprochen und soll hier nochmals für das gewählte Penumbra-Modell eingehender beleuchtet werden. Die Erklärung für das Verhalten der Netto-Zirkular-Polarisation bei unterschiedlichen Korrelationslängen läßt sich mit Hilfe der aus Abschnitt 4.3.3 hergeleiteten Beziehung (4.41) deutlich machen. In etwas modifizierter Form lautete diese Beziehung für die Entwicklung der Netto-Zirkular-Polarisation entlang einer kleinen Wegstrecke Δs

$$\begin{aligned}
NCP(Y_j^V) \propto & -\frac{1}{l} \cos(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sin^2(\gamma_i) \Psi_p^i p_i (\Psi_r^j - \Psi_b^j) d\lambda \\
& -\frac{1}{l} \sin^2(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \cos(\gamma_i) (\Psi_r^i - \Psi_b^i) p_i \Psi_p^j d\lambda \\
& -\frac{1}{2l} \cos(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Psi_r^j \sum_i \Psi_r^i (1 + \cos^2(\gamma_i)) p_i - \Psi_b^j \sum_i \Psi_b^i (1 + \cos^2(\gamma_i)) p_i \right] d\lambda \\
& -\frac{1}{2l} (1 + \cos^2(\gamma_j)) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Psi_r^j \sum_i \Psi_r^i \cos(\gamma_i) p_i - \Psi_b^j \sum_i \Psi_b^i \cos(\gamma_i) p_i \right] d\lambda \\
& -\frac{1}{2l} \cos(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Psi_r^j \sum_i \Psi_b^i (1 + \cos^2(\gamma_i)) p_i - \Psi_b^j \sum_i \Psi_r^i (1 + \cos^2(\gamma_i)) p_i \right] d\lambda \\
& +\frac{1}{2l} (1 + \cos^2(\gamma_j)) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Psi_r^j \sum_i \Psi_b^i \cos(\gamma_i) p_i - \Psi_b^j \sum_i \Psi_r^i \cos(\gamma_i) p_i \right] d\lambda. \quad (8.1)
\end{aligned}$$

Hierbei ist p_i der Wahrscheinlichkeitswert der i -ten Komponente. Benutzen wir nun die in unseren Modellrechnungen gemachten Annahmen, dass die beiden penumbralen Komponenten jeweils den gleichen Temperatur- und Druckschichtungen gehorchen und dass die Magnetfeldstärke in beiden Komponenten gleich ist, so folgt, dass entlang der Sichtlinie, neben der Geschwindigkeit nur noch eine Variation im Inklinationswinkel des Magnetfeldes auftritt. Damit kann unter der Berücksichtigung, dass bei einem statistischen Übergang von Komponente i in die gleiche Komponente i keine Netto-Zirkular-Polarisation entstehen kann (siehe Gleichung (4.43) in Abschnitt 4.3.3), die Beziehung (8.1) für das 2-Komponenten Modell vereinfacht werden, wodurch sich für die Netto-Zirkular-Polarisation des bedingten Stokes-Vektors folgende Beziehung ergibt:

$$\begin{aligned}
NCP(Y_j^V) \propto & -\frac{p_i}{l} \cos(\gamma_j) \sin^2(\gamma_i) \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_r^j - \Psi_b^j) \Psi_p^i d\lambda \\
& -\frac{p_i}{l} \cos(\gamma_i) \sin^2(\gamma_j) \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_r^i - \Psi_b^i) \Psi_p^j d\lambda \\
& -\frac{p_i}{2l} \cos(\gamma_j) (1 + \cos^2(\gamma_i)) \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_r^j \Psi_b^i - \Psi_b^j \Psi_r^i) d\lambda \\
& +\frac{p_i}{2l} \cos(\gamma_i) (1 + \cos^2(\gamma_j)) \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_r^j \Psi_b^i - \Psi_b^j \Psi_r^i) d\lambda. \quad (8.2)
\end{aligned}$$

Um die Integrale in (8.2) zu berechnen, benutzen wir die analytischen Lösungen aus Abschnitt 4.3.3, Gleichung (4.42). Für die resultierenden bedingten Stokes-Vektoren der Hin-

tergrundkomponente Y_H^V folgt dann

$$\begin{aligned}
NCP(Y_H^V) \propto & -\frac{p_F}{l} \cos(\gamma_H) \sin^2(\gamma_F) \left(H \left(\frac{v_r^H - v_p^F}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) - H \left(\frac{v_b^H - v_p^F}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) \right) \\
& -\frac{p_F}{l} \cos(\gamma_F) \sin^2(\gamma_H) \left(H \left(\frac{v_r^F - v_p^H}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) - H \left(\frac{v_b^F - v_p^H}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) \right) \\
& +\frac{p_F}{2l} \left(\cos(\gamma_F)(1 + \cos^2(\gamma_H)) - \cos(\gamma_H)(1 + \cos^2(\gamma_F)) \right) \\
& \cdot \left(H \left(\frac{v_r^H - v_b^F}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) - H \left(\frac{v_b^H - v_r^F}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) \right), \tag{8.3}
\end{aligned}$$

und für den bedingten Stokes-Vektor der Flussröhrenkomponente Y_F^V die entsprechende Beziehung

$$\begin{aligned}
NCP(Y_F^V) \propto & -\frac{p_H}{l} \cos(\gamma_F) \sin^2(\gamma_H) \left(H \left(\frac{v_r^F - v_p^H}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) - H \left(\frac{v_b^F - v_p^H}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) \right) \\
& -\frac{p_H}{l} \cos(\gamma_H) \sin^2(\gamma_F) \left(H \left(\frac{v_r^H - v_p^F}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) - H \left(\frac{v_b^H - v_p^F}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) \right) \\
& +\frac{p_H}{2l} \left(\cos(\gamma_H)(1 + \cos^2(\gamma_F)) - \cos(\gamma_F)(1 + \cos^2(\gamma_H)) \right) \\
& \cdot \left(H \left(\frac{v_r^F - v_b^H}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) - H \left(\frac{v_b^F - v_r^H}{\sqrt{2}}, \sqrt{2a} \right) \right). \tag{8.4}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt eine Verallgemeinerung des von Landolfi & Landi Degl'Innocenti (1996) hergeleiteten Delta-Theta-Effekt für den Fall einer stochastisch organisierten Atmosphäre dar. In der vorliegenden Schreibweise, in der der Inklinationswinkel des Magnetfeldes zur Sichtlinie mit γ bezeichnet wird, soll dieser Effekt als Delta-Gamma-Effekt bezeichnet werden. Abgesehen von dem bereits in der Herleitung in Abschnitt 4.3.3 vernachlässigten Linienabsorptionskoeffizienten bestimmen die beiden Ausdrücke (8.3) und (8.4) die Stärke der Netto-Zirkular-Polarisation für gegebene Geschwindigkeiten und Magnetfeldvektoren. Anhand dieser Ausdrücke wird klar, dass die charakteristischen Kurvenverläufe in den Abbildungen 8.1 und 8.2 allein durch den Delta-Gamma-Effekt verursacht werden, dessen Beiträge, bedingt durch die Geometrie des Modells, vom heliozentrischen Winkel abhängen. So ergeben sich zwei interessante Eigenschaften aus den Gleichungen (8.3) und (8.4). Zum einen folgt aus den Symmetrieeigenschaften der Voigt-Funktion H und der resultierenden Netto-Zirkular-Polarisation, die sich gemäß

$$NCP(V) = NCP(Y_H^V) p_H + NCP(Y_F^V) p_F \tag{8.5}$$

zusammensetzt, dass die Netto-Zirkular-Polarisation für den Delta-Gamma-Effekt eine akkumulierende Größe ist, d.h. in beiden atmosphärischen Komponenten wird sie mit gleichem Vorzeichen geführt. In dem einfachen nicht statistischen Fall bedeutet dies, dass sowohl bei einem Übergang vom Regime H nach F als auch umgekehrt von F und H sich die Netto-Zirkular-Polarisationen addieren. Die andere Eigenschaft ergibt sich durch die statistische Kopplung der beiden Strukturen. Dies führt dazu, dass in Abhängigkeit von der Fluktuationsrate, welche bestimmt wird durch den Faktor der Übergangsrate l^{-1} in den

Gleichungen (8.3) und (8.4), die Ausprägung der Netto-Zirkular-Polarisation stark von der Korrelationslänge abhängt. Dies erklärt auch die starke Abnahme der Netto-Zirkular-Polarisation-Kurven mit zunehmender Korrelationslänge in den Abbildungen 8.1 und 8.2. Man beachte auch hier, dass relativ starke Veränderungen in einem Bereich von $l < 100$

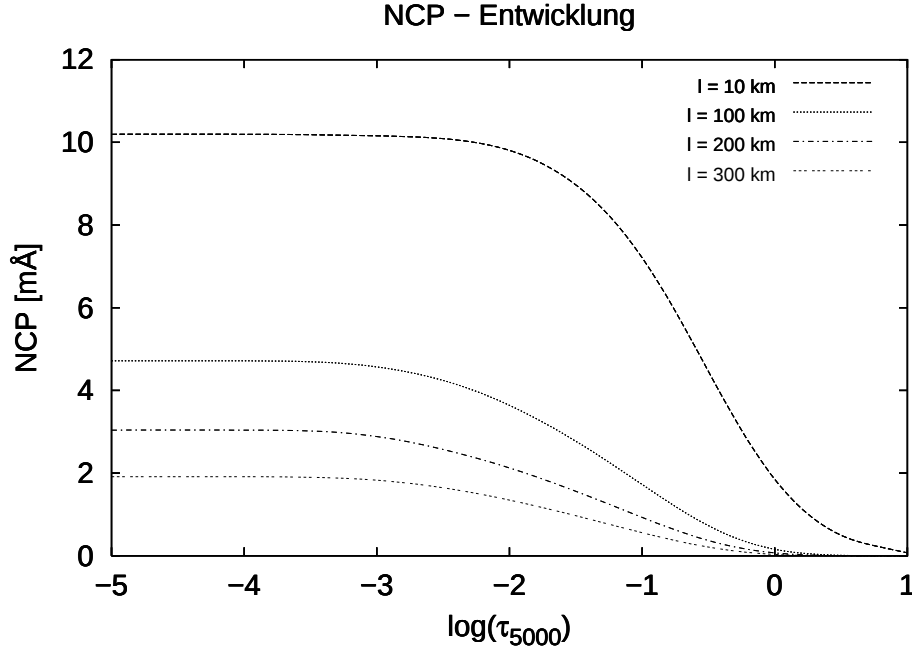


Abb. 8.3: Die Entwicklung der Netto-Zirkular-Polarisation (NCP) durch die Atmosphäre für verschiedenen Korrelationslängen l .

km stattfinden, einem Bereich, in dem Strukturen oft als mikroturbulent charakterisiert und auch beschrieben werden.

Um zu verdeutlichen, wie sich die Entstehung der Netto-Zirkular-Polarisation durch die Atmosphäre entwickelt, ist in Abbildung 8.3 für die hier benutzte stochastische Penumbra-Modellatmosphäre und für eine Beobachtung unter $\mu = 0.8$, der Entstehungsprozess des Erwartungswertes der Netto-Zirkular-Polarisation (8.5) für verschiedenen Korrelationslängen aufgetragen. Besonders ausgeprägt ist der steile Anstieg der Netto-Zirkular-Polarisation im Linienentstehungsgebiet für eine Korrelationslänge von 10 km. Schon bei einer strukturellen Ausdehnung von 100 km ist die akkumulierte Netto-Zirkular-Polarisation deutlich verringert und der Prozess der NCP-Entwicklung ist merklich geschwächt. Diese *Dämpfung* der NCP-Entwicklung ist wiederum auf die Fluktuationsrate bzw. Übergangsrate l^{-1} in (8.3) und (8.4) zurückzuführen. Somit stellt sich auch hier heraus, dass die entstehende Netto-Zirkular-Polarisation in einer stochastisch fluktuierenden Atmosphäre stark von der Korrelationslänge bzw. der strukturellen Ausdehnung der beteiligten Komponenten beeinflusst wird.

Aufgrund der relativen Anordnung der Flussstrukturen gegenüber dem Hintergrund sowie der Benutzung eines isothermen Modells, besitzen die hier durchgeführten Modellrechnungen sicherlich nur eine sehr eingeschränkte Aussagefähigkeit. Dennoch ist unter der Voraussetzung, dass der Delta-Gamma-Effekt den Hauptbeitrag zur Netto-Zirkular-Polarisation bildet, deutlich geworden, dass mikroturbulente Strukturen die stärkste Netto-Zirkular-

Polarisation erzeugen. Wohingegen für Strukturen mit einer mittleren Ausdehnung von mehr als 300 km, die Netto-Zirkular-Polarisation drastisch reduziert ist. Da die hier verwendeten Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen den magnetischen Strukturen mit 6 km/s relativ groß sind, sodass die daraus resultierenden Netto-Zirkular-Polarisationen durch die Überlappung der verschiedenen σ - und π -Komponenten der magnetischen Strukturen bereits sehr deutlich betont werden, sollten Strukturen mit einer mittleren Ausdehnung die grösser als 300 km ist, kaum noch in der Lage sein eine deutliche Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation zu erzeugen.

Da es bis heute nur außerordentlich wenige Messungen der Mitte-Rand-Variation der Netto-Zirkular-Polarisation in der Penumbra gibt (dem Autor selbst ist nur eine Veröffentlichung bekannt (Martinez-Pillet, 2000)), besteht unter Ausnutzung derartiger Messungen und unter der Massgabe einer verbesserten Modellierung, die Möglichkeit, mit Hilfe des in dieser Arbeit entwickelten stochastischen Strahlungstransports, Aussagen über die strukturellen Größenordnungen der penumbralen Filamente zu erhalten.

Kapitel 9

Magnetfeldstrukturen in der ruhigen Sonne

In diesem Abschnitt soll, als weitere Anwendung des stochastischen Transports polarisierter Strahlung, ein einfaches Modell eines Internetzwerkgebietes der ruhigen Sonne untersucht werden. Magnetfelder in Internetzwerkgebieten wurden bereits vor ca. 3 Jahrzehnten von Livingston & Harvey (1975) beobachtet. Obwohl bis heute unser Verständnis über die Natur des Internetzwerkfeldes begrenzt ist, haben gerade jüngere Beobachtungen mit hochauflösenden spektropolarimetrischen Methoden ein immer detaillierteres Bild über die Struktur des Magnetfeldes der ruhigen Sonne geliefert (Grossmann-Doerth, Keller & Schüssler, 1996; Sigwarth et al., 1999; Socas-Navarro & Sanchez Almeida, 2002; Hartje & Kneer, 2002; Sanchez Almeida, Dominguez Cerdana & Kneer, 2003; Khomenko et al., 2003). Insbesondere die aus diesen Beobachtungen gewonnene Erkenntnis, dass ein großer Teil des magnetischen Flusses der Sonne aus diesen scheinbar ruhigen Gebieten entstammt, machen die Untersuchungen des Internetzwerkes zu einem der aktuellsten Forschungsgebiete im Bereich der solaren Photosphäre.

Bedingt durch die Schwierigkeiten bei der Messung des kleinskaligen Magnetfeldes in den Internetzwerkgebieten besteht noch keine genauere Kenntnis darüber, ob die inneren Feldstärken der magnetischen Strukturen im Kilogauss- oder im Subkilogaussbereich liegen. Die Bestimmung der Magnetfeldstärke anhand von Spektrallinien aus den sichtbaren Wellenlängenbereichen ergaben systematisch größere Feldstärken, die fast ausschliesslich im Kilogauss-Bereich lagen (Grossmann-Doerth, Keller & Schüssler, 1996; Sigwarth, 1999; Socas-Navarro & Sanchez Almeida, 2002; Hartje & Kneer, 2002; Sanchez Almeida, Dominguez Cerdana & Kneer, 2003). Messungen, die im infraroten Wellenlängenbereich durchgeführt worden sind, ergaben hingegen systematisch niedrigere Subkilogauss-Felder (Lin & Rimmele, 1999; Khomenko et al., 2003). Kürzlich hatten Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003) ein Szenario vorgeschlagen, dass diese Diskrepanz erklären könnte. Dabei stützt sich die Erklärung zum einen auf das unterschiedliche Aufspaltungsverhalten von magnetisch sensitiven Spektrallinien im sichtbaren und im infraroten Wellenlängenbereich und zum anderen auf die Annahme einer kontinuierlichen Verteilung der Magnetfeldstärken in dem zur Linienentstehung beitragendem Gebiet.

In diesem Kapitel soll nun, aufbauend auf den Untersuchungen von Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003), gezeigt werden, wie neben einer kontinuierlichen Verteilung der Magnetfeldstärken, auch die Berücksichtigung der endliche Ausdehnung dieser Magnetfeld-

strukturen einen nicht unerheblichen Einfluss auf die zu bestimmenden Magnetfeldstärken haben können.

9.1 Wahrscheinlichkeitsdichte der Magnetfeldstärke

Ansatzpunkt ist hier die Beschreibung einer kontinuierlichen Verteilung der Magnetfeldstärken. Dabei benutzen wir hier das von Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003) beschriebene einfache Modell einer Wahrscheinlichkeitsdichte für die Magnetfeldstärke B der Form

$$p(B) = \begin{cases} f_0 \exp(-B/B_0) & : \text{falls } B \leq B_{max}, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.1)$$

Der Parameter B_0 bestimmt dabei die mittlere Feldstärke der Verteilung. Wir nehmen für die folgenden Modellrechnungen für B_0 einen Wert von 200 G an. Für die Maximalfeldstärke B_{max} soll ein Wert von 2000 G gelten. Nun kann der Normierungsfaktor f_0 berechnet werden, für den sich folgende Beziehung ergibt:

$$f_0 = [B_0 (1 - \exp(-B_{max}/B_0))]^{-1}. \quad (9.2)$$

Um im folgenden eine vereinfachte diskrete Approximation dieser Dichtefunktion zu erhalten, berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $P(B_i < B < B_i + \Delta B)$ für n endliche Intervalle der Länge ΔB . Aus Gleichung (9.1) folgt dann

$$P(B_i < B < B_i + \Delta B) = \frac{\exp(-B_i/B_0) - \exp(-(B_i + \Delta B)/B_0)}{1 - \exp(-B_{max}/B_0)}. \quad (9.3)$$

Die repräsentativen Magnetfeldstärken für jedes Intervall i sollen durch den jeweiligen Erwartungswert des Intervalls gegeben sein. Mit Hilfe von (9.3) läßt sich der Erwartungswert des i -ten Intervalls leicht durch

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_i &= \int_{B_i}^{B_i + \Delta B} B p_i(B) dB \\ &= f_i B_0 [(B_i + B_0) \exp(-B_i/B_0) - (B_i + \Delta B + B_0) \exp(-(B_i + \Delta B)/B_0)] \end{aligned} \quad (9.4)$$

bestimmen. Dabei ist $p_i(B)$ die auf das i -te Intervall normierte Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß der Form (9.1). Die Normierung wird dabei durch eine für jedes Intervall gültige Normierungsfunktion f_i erreicht, die sich wie folgt ergibt

$$f_i = [B_0 (\exp(-B_i/B_0) - \exp(-(B_i + \Delta B)/B_0))]^{-1}. \quad (9.5)$$

Für die diskrete Approximation der Intervalle in den Modellrechnungen wird eine gleichmäßige Intervalllänge von $\Delta B = 200$ G gewählt und anschließend mit Hilfe der Gleichungen (9.1), (9.3) und (9.4) die entsprechenden diskreten Realisierungen der Magnetfeldverteilung berechnet.

9.2 Zur Diskrepanz der Magnetfeldbestimmung

Die Modellrechnungen werden auf der Basis des Modells der ruhigen Sonnenatmosphäre von Holweger & Müller (1974) durchgeführt, die hier für alle beteiligten Strukturen gültig sein soll. Gestützt auf Beobachtungsdaten soll angenommen werden, dass sich der Großteil des Magnetfeldes in einem Bereich unterhalb von 200 G in einem turbulenten Zustand gemischter Polarität befindet und nicht zu einem magnetischen Nettofluss beiträgt (Sanchez Almeida, Emonet & Cattaneo, 2002; Khomenko et al., 2003). Diesem Umstand wird in der folgenden Modellrechnung derart Rechnung getragen, dass im Intervall 0 G - 200 G die effektive Magnetfeldstärke des Erwartungswertes auf Null gesetzt wird, sodass dieser Bereich als quasi-feldfrei betrachtet werden kann.

Die Ergebnisse der Modellrechnungen sollen Gegenstand einer fiktiven Messung sein, anhand derer eine Abschätzung für die Magnetfeldstärke erfolgt. Wie bei beobachteten Stokes-Profilen aus ruhigen Gebieten der Photosphäre, soll auch hier die Magnetfeldstärke direkt aus der Aufspaltung der Infrarotlinie ermittelt werden (Khomenko et al., 2003). Dies wird dadurch gerechtfertigt, dass sich die Infrarotlinie Fe I 15648 Å bereits für relativ kleine Magnetfeldstärken in einem Starkfeldregime befindet. Für die im sichtbaren Wellenlängenbereich liegenden Eisenlinien Fe I 6301 Å und Fe I 6302 Å hingegen ist dies nicht der Fall. Diese beiden Linien befinden sich noch weitgehend im Schwachfeldregime bzw. in einer Übergangsphase. Wir gehen hier gemäß Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003) vor und benutzen eine Variante der 'Line-Ratio-Method' bzw. der 'Linien-Verhältnis-Methode' von Stenflo (1973). Dabei sollen die Ergebnisse der Modellrechnungen auf der Basis eines einfachen makroskopischen 1-Komponenten-Szenario interpretiert werden. D.h es wird angenommen, dass sich im Auflösungselement neben einer unmagnetischen eine homogene magnetische Komponente befindet. Die Bezeichnung '1-Komponenten-Szenario' resultiert daher, dass bei dieser Betrachtungsweise eine Sichtlinie immer vollständig in einer Komponente verbleibt und erst im Sinne eines 1.5-Dimensionalen Strahlungstransport zum resultierenden Stokes-Spektrum gemittelt wird. Die Linien-Verhältnis-Methode, die auf der Proportionalität zwischen dem Verhältnis der Stokes-V-Amplituden und der Landé-Faktoren der beteiligten Linien beruht und die differentielle Zeeman-Sättigung beim Übergang vom Schwachfeldregime in ein Starkfeldregime ausnutzt, liefert eine eindeutige Beziehung zwischen dem Verhältnis der Stokes-V-Amplituden und der zugrundeliegenden Magnetfeldstärke und dies unabhängig vom magnetischen Füllfaktor. Da die beiden Eisenlinien Fe I 6301 Å und Fe I 6302 Å bis auf den Landé-Faktor ähnliche Linienparameter besitzen, können mit einer Kalibrierungskurve im folgenden die Magnetfeldstärken anhand der beiden Stokes-V-Amplituden abgeschätzt werden.

Mit Hilfe der approximierten Wahrscheinlichkeitsdichte (9.1) werden nun für eine makrostrukturierte Atmosphäre ($l = 10^4$ km), Profile für die im sichtbaren liegenden Eisenlinien Fe I 6302 Å und Fe I 6301 Å sowie für die im infraroten liegenden Eisenlinie Fe I 15648 Å berechnet. Dabei wurde eine Strukturlänge von 10^4 km gewählt um sicher zu gehen, dass die atmosphärischen Strukturen auch im statistischen Sinne wirklich entkoppelt - also makroskopisch - sind. Somit verbleibt jeder Sehstrahl während des Linienentstehungsprozesses - auch in einem statistischen Sinne - weitgehend in nur einer beitragenden Struktur. Dies führt direkt zur Faltung der resultierenden Stokes-Profile mit der Wahrscheinlichkeitsdichte (9.1), wie auch im Falle der konventionellen Vorgehensweise bei makroskopischen Strukturen (Socas-Navarro & Sanchez Almeida, 2003). Für die makroskopische Atmosphäre ergeben sich die in den Abbildungen 9.1 und 9.2 gezeigten Stokes-V-Profile.

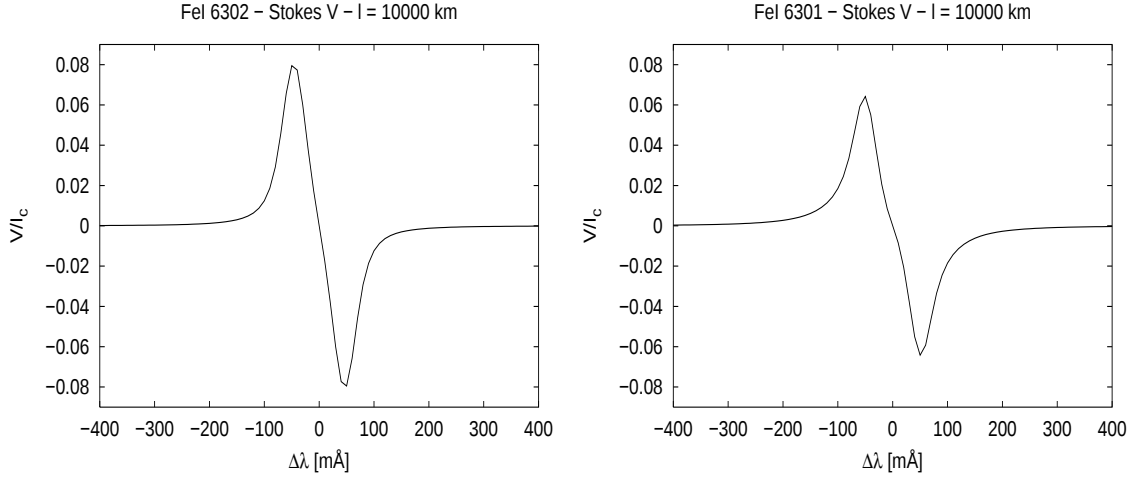


Abb. 9.1: Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) für eine makrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10^4$ km.

Entsprechend einer Interpretation gemäß des 1-Komponenten-Szenarios ergibt sich für das Liniengpaar Fe I 6301 Å und Fe I 6302 Å anhand der Kalibrierungskurve ein Wert von 739 G für die Magnetfeldstärke. Dabei ist für diese beiden Linien anhand des Amplitudenverhältnisses zu erkennen, dass diese nicht mehr in einem reinen Schwachfeldregime entstehen, sodass aufgrund der differentiellen Zeeman-Sättigung das Verhältnis nicht mehr, wie in einem reinen Schwachfeldregime, dem der beiden g-Faktoren entspricht (Stenflo, 1994). Die anhand der Aufspaltung der Infrarotlinie Fe I 15648 Å ermittelte Magnetfeldstärke liegt bei 361 G. Die Ursache, weshalb mit Hilfe

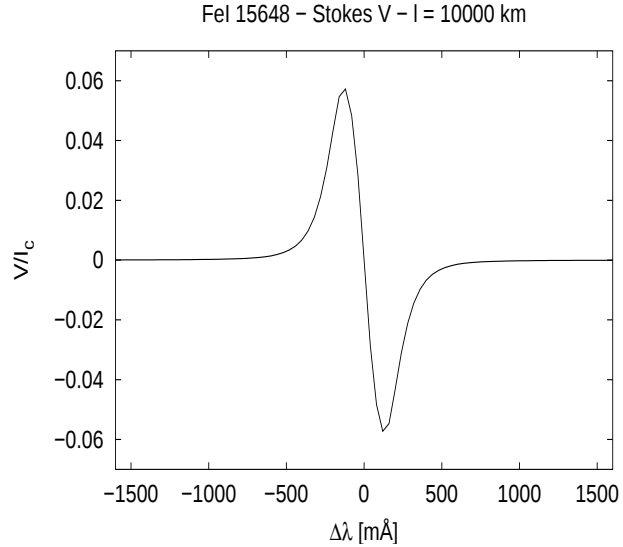


Abb. 9.2: Darstellung des aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profil der Eisenlinien Fe I 15648 Å für eine makrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10^4$ km.

der Infrarotlinie eine niedrigere Feldstärke ermittelt wird, liegt an dem bereits frühen Übergang - verursacht durch die quadratische Abhängigkeit der Zeeman-Aufspaltung von der Wellenlänge - der Infrarotlinie von einem reinen Schwachfeldregime in ein Starkfeldregime. Dadurch kann sich die Verteilung der Magnetfeldstärken deutlicher im Aufspaltungsverhalten der Infrarotlinie manifestieren wodurch sich entsprechend der Wahrscheinlichkeitsdichte (9.1) eine stärkere Gewichtung der schwächeren Felder ergibt. Bei den sichtbaren Linien hingegen ist trotz einer geringeren Gewichtung der starken Magnetfelder, das Verhalten ein anderes. Dies liegt zum einen daran, dass beide sichtbaren Linien im Vergleich zur Infrarot-

linie erst sehr spät das Schwachfeldregime verlassen und die Stokes-V-Amplituden in der Schwachfeldnäherung proportional zum Verhältnis der Zeeman-Aufspaltung $\Delta\lambda_B$ skalieren. Zum anderen liegt es an dem bereits erwähnten differentiellen Zeeman-Effekt des verwendeten Linienpaars, also der bei unterschiedlichen Feldstärken beginnenden Sättigung der Stokes-V-Amplituden. Während also die schwachen Feldstärken der Verteilung (9.1) zu einem Anwachsen gemäß des Verhältnisses der g-Faktoren führen, sorgen die höheren Feldstärken für ein differentielles Wachstum der Amplituden beider Linie. So werden schließlich bei einer Untersuchung der Stokes-V-Amplitudenverhältnisse, die Effekte der höheren Feldstärken deutlicher betont, als dies entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte (9.1) zu erwarten wäre.

Basierend auf der Annahme, dass nur ein Teil des Auflösungselementes zum entstehenden Polarisationsignal beiträgt, soll für die fiktive Messung eine Abschätzung des Füllfaktors erfolgen. Unter der Voraussetzung, dass die thermodynamischen Verhältnisse in den beteiligten Strukturen weitgehend übereinstimmen, kann mit Hilfe der in Khomenko et al. (2003) angegebenen Beziehung

$$f = \frac{2V_A}{(I_c - I_0) \cos \gamma} \quad (9.6)$$

der Füllfaktor f abgeschätzt werden. Dabei ist V_A die Stokes-V-Amplitude, I_c die Intensität des lokalen Kontinuums und I_0 die Minimumsintensität des Stokes-I-Profiles und γ der Inklinationwinkel des Magnetfeldes. Der hieraus erhaltene Füllfaktor für die Simulation von 0.367 entspricht sehr genau dem zugrundeliegendem Füllfaktor aus der angenommenen Wahrscheinlichkeitsdichte (9.1) mit $B_0 = 200$ G und der Annahme, dass im Bereich 0 G - 200 G kein effektives Magnetfeld existiert. Benutzen wir weiterhin die von Khomenko et al. (2003) aufgeführte Beziehung

$$\langle B \rangle = f B \cos \gamma, \quad (9.7)$$

um eine Abschätzung für die magnetische Flussdichte zu erhalten, so folgt mit (9.6) aus der Modellrechnung eine magnetische Flussdichte von 133 G. Wie bereits von Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003) beschrieben, liefert eine solche Wahrscheinlichkeitsdichte - obwohl hier zusätzlich reduziert durch den Bereich der gemischten Polaritäten - zunächst eine viel zu große magnetische Flussdichte, die nicht mit den aus Beobachtungen ermittelten Werten in Einklang steht.

Nun soll im weiteren berücksichtigt werden, dass die durch die Verteilung (9.1) charakterisierten atmosphärischen Strukturen auch eine endliche Ausdehnung besitzen und nicht makroskopischen Ursprungs sind. Dazu betrachten wir zunächst das andere Extrem einer mikrostrukturierten Atmosphäre und reduzieren dazu die Korrelationslänge aller magnetischen Strukturen auf $l = 10$ km. Um dem grösseren Wahrscheinlichkeitswert des quasifeldfreien Volumens auch entlang der Sichtlinie Rechnung zu tragen, soll die Korrelationslänge der feldfreien Strukturen auf die Größenordnung einer Linienentstehungsregion entlang der Sichtlinie, $l = 400$ km, festgelegt werden. Man beachte also, dass wir somit in der Lage sind, auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung entlang der Sichtlinie mit zu berücksichtigen.

Die Ergebnisse dieser Modellannahmen sind in den Abbildungen 9.3 und 9.4 dargestellt. Hier ist sehr gut zu erkennen, dass das Stokes-V-Profil und somit auch die magnetische

Flussdichte nun stark reduziert ist. Ohne dass eine veränderte Dichtefunktion definiert werden musste, wie es bei Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003) der Fall ist, konnte hier der resultierende Fluss allein dadurch gemindert werden, dass nun Korrelationseffekte mit in Betracht gezogen worden sind.

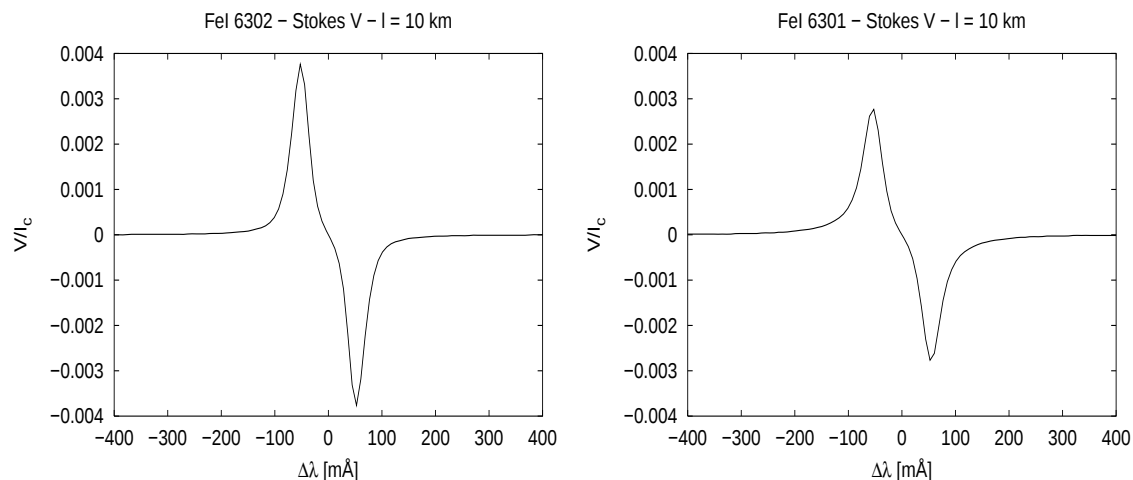


Abb. 9.3: Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) für eine magnetisch mikrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km.

Die nun im Modell korrekt simulierte Absorption der polarisierten Strahlung innerhalb des quasi-feldfreien Gebietes führt so zu einer drastischen Minderung des Stokes-V-Signals. Man beachte, dass, bedingt durch die Wahrscheinlichkeitsdichte (9.1) und die längere Korrelationslänge der feldfreien Strukturen, die Wahrscheinlichkeit für Photonen nach dem Verlassen einer magnetischen Struktur sehr groß ist im feldfreien Gebiet zu verbleiben und dort entweder thermalisiert zu werden bzw. direkt aus der Atmosphäre zu entweichen. Dadurch tritt eine erheblich Absorption des Polarisationssignals auf, das zur Reduzierung des Stokes-V-Signals führt. Dieser Effekt ist durch eine Makrostrukturierung der Atmosphäre nicht

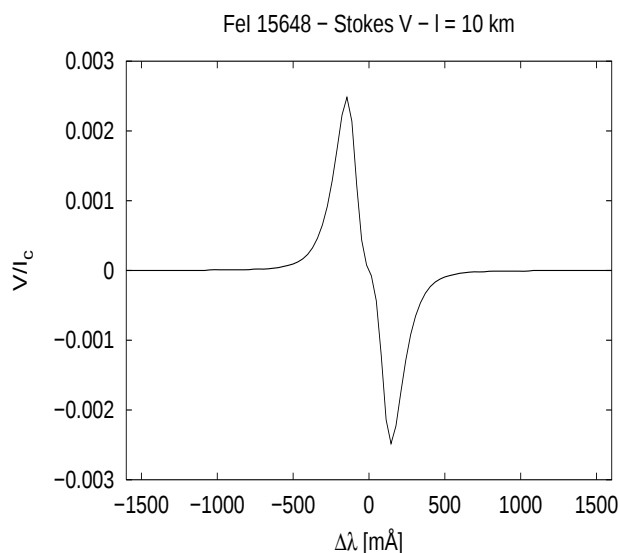


Abb. 9.4: Darstellung des aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profil der Eisenlinien Fe I 15648 Å für eine magnetisch mikrostrukturierte Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km.

zu beschreiben. Die aus diesen Stokes-Profilen ermittelte Magnetfeldstärke, basierend auf der für das 1-Komponenten-Szenario ermittelten Kalibrierungskurve, ergibt einen Wert von 708 G. Durch die Aufspaltung der Infrarotlinie wurde eine Magnetfeldstärke von 405 G

ermittelt. So bleiben die ermittelten Feldstärken weitgehend unbeeinflusst von der Veränderung der Atmosphärenstruktur. Anhand der Beziehung (9.6) läßt sich mit dem Stokes-I und Stokes-V-Profil der Infrarotlinie ein Füllfaktor von 1,25 % abschätzen und mit der Beziehung (9.7) eine magnetische Flussdichte von 5 G.

Fügen wir nun eine weitere Annahme zu den Modellrechnungen hinzu. Sowohl aus Beobachtungen (Khomenko et al. 2003) als auch aus einfachen theoretischen Abschätzungen liegt es nahe anzunehmen, dass die Magnetfeldstrukturen mit zunehmender Magnetfeldstärke aufgrund von Auftriebskräften (Schüssler, 1986) mehr und mehr die Tendenz haben, sich vertikal auszurichten und somit eine kleinere Neigung gegen den lokalen Oberflächennormalenvektor aufweisen. So ist im Mittel die Korrelationslänge entlang der Sichtlinie für Strukturen mit starken Magnetfeldern vergrößert. Dies soll dem geometrischen Effekt Rechnung tragen, dass bei zentrumsnaher Beobachtung die Sichtlinie im Mittel länger in den vertikaler ausgerichteten Magnetfeldstrukturen verbleibt, als das für geneigte und turbulenteren Strukturen der Fall ist. Die Erhöhung der Korrelationslänge kann aber auch alternativ dazu auf eine generell größere Ausdehnung der Kilogauss-Strukturen gegenüber den Subkilogauss-Strukturen beruhen. Da es bei den hier vorliegenden Modellrechnungen darum geht, prinzipielle Eigenschaften einer endlichen Korrelationslänge in einer stochastisch organisierten Atmosphäre zu untersuchen, nehmen wir hier eine ad-hoc gewählte Abhängigkeit der Korrelationslänge von der Feldstärke an, die weder auf theoretische noch auf der Grundlage von Beobachtungen gewonnenen Annahmen beruht. Die Abhängigkeit der Korrelationslänge von der Feldstärke soll dabei folgender Beziehung gehorchen:

$$l(B) = \begin{cases} 400 & : \text{falls } B \leq 200G, \\ 10 & : \text{falls } 200G < B < 1000G, \\ 70 & : \text{falls } B \geq 1000G. \end{cases} \quad (9.8)$$

Die aus diesen Annahmen resultierenden Stokes-V-Profile sind in den folgenden Abbildungen 9.5 und 9.6 zu sehen. Während die Veränderungen der Korrelationslänge für stärkere Magnetfelder in den sichtbaren Eisenlinien Fe I 6301 Å und Fe I 6302 Å praktisch nur in den Amplituden der Stokes-V-Signale zu erkennen sind, ist bei der Infrarotlinie ein deutliches Ansteigen der Flanken in den Stokes-V-Profilen zu erkennen. Dieser Anstieg ist auch deutlich bei vielen von Khomenko et al. (2003) gemessenen Stokes-V-Profilen erkennbar. Der Anstieg in den Flanken des Stokes-V-Profils läßt sich durch die Zunahme der Korrelationslänge für Kilogauss-Strukturen erklären, da nun die größere Korrelationslänge in den starken Magnetfeldern zu einer stärkeren Gewichtung der Kilogauss-Strukturen führt. Man beachte dabei, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (9.1) unverändert bleibt. Obwohl für die schwache Infrarotenlinie, die Korrelationseffekte, also Sichtlinieneffekte, nicht so drastisch in Erscheinung treten sollten, wie dies bei den beiden stärkeren Linien des Linienpaares der Fall ist, ist gerade bei der schwachen Infrarotlinie der Effekt am deutlichsten ausgeprägt. Dies hat seine Ursache wiederum in dem bereits erwähnten unterschiedlichen Aufspaltungsverhalten von magnetisch sensitiven Spektrallinien aus dem sichtbaren und dem infraroten Wellenlängenbereich. Da sich, wie bereits besprochen, bei der Infrarotlinie die zugrundeliegende Magnetfeldverteilung weitgehend im Aufspaltungsverhalten wieder spiegelt, wird auch durch die Vergrößerung der Korrelationslänge für Kilogauss-Strukturen deren Gewichtung, auch ohne Veränderung der Wahrscheinlichkeitsdichte (9.1), erhöht. So führt also die Erhöhung des *Sichtlinienfüllfaktors* in Form der Korrelationslänge zu einer Anhebung der Flanken im Stokes-V-Profil der Infrarotlinie.

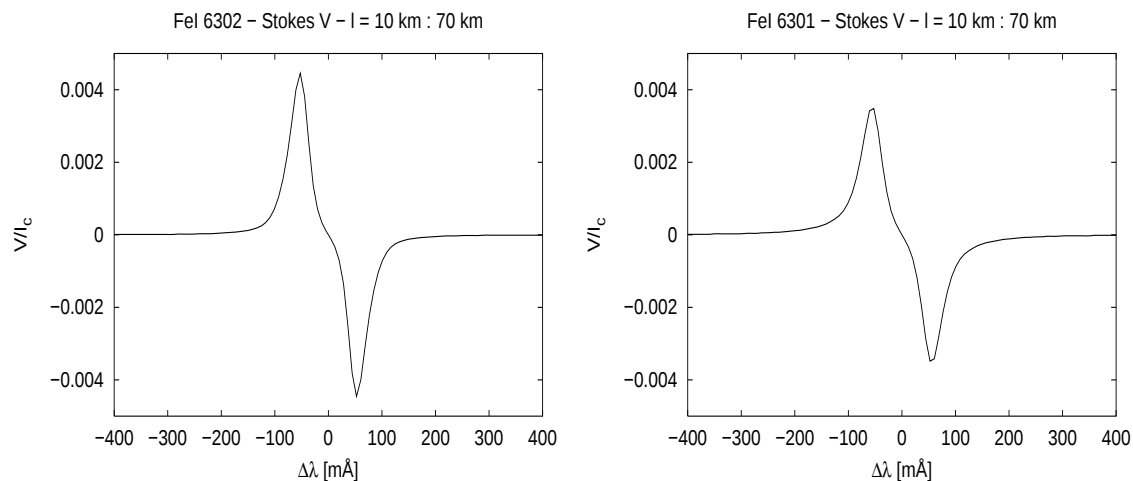


Abb. 9.5: Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profiles der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) für eine Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km für Subkilogauss-Strukturen und $l = 70$ km für Kilogauss-Strukturen.

Bei den sichtbaren Linien hingegen führt dieser Effekt zu einer weiteren Angleichung der Stokes-V-Amplituden. So wird anhand des Linienpaars Fe I 6301 Å und Fe I 6302 Å mit Hilfe der Kalibrierungskurve eine Magnetfeldstärke von 921 G bestimmt. Die aus der Infrarotlinie Fe I 15648 Å gewonnene Magnetfeldstärke bleibt, genau wie im mikrostrukturierten Fall, bei 405 G, da durch die Anhebung der Flanken die Bestimmung der Maxima nicht stark beeinflusst wird. Auch der aus der Infrarotlinie gewonnene Füllfaktor sowie die magnetische Flussdichte bleiben mit 1,25 % und 5 G gegenüber dem magnetisch mikrostrukturierten Fall identisch. So bleiben durch die Veränderung

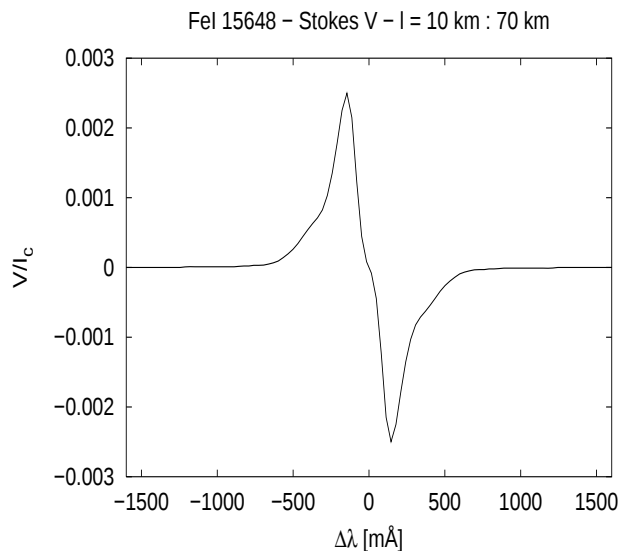


Abb. 9.6: Darstellung des aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profils der Eisenlinie Fe I 15648 Å für eine Atmosphäre mit denselben Eigenschaften wie in Abbildung 9.5 beschrieben.

der Korrelationslängen für Kilogaussfelder die aus der Infrarotlinie gewonnenen Parameter erhalten, jedoch verändert sich die Form des infraroten Stokes-V-Profils merklich. Gemäß Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003), die ebenfalls durch eine Veränderung ihrer Verteilungsfunktion, Stokes-V-Profile mit stark angehobenen Flanken erhalten haben, ist dies für die Beobachtungen von Khomenko et al. (2003) ein charakteristisches Merkmal von infraroten Stokes-V-Profilen aus ruhigen Internetzwerkgebieten.

Zum Abschluß soll noch gezeigt werden, wie dieses einfache stochastische Modell in der Lage ist, auch asymmetrische Stokes-V-Profile zu erzeugen. Mit demselben Wirkungsme-

chanismus wie bei den Modellrechnungen aus Kapitel 7 kann durch eine differentielle Geschwindigkeitsverteilung der einzelnen Strukturen eine Asymmetrie der Stokes-V-Profile erzeugt werden.

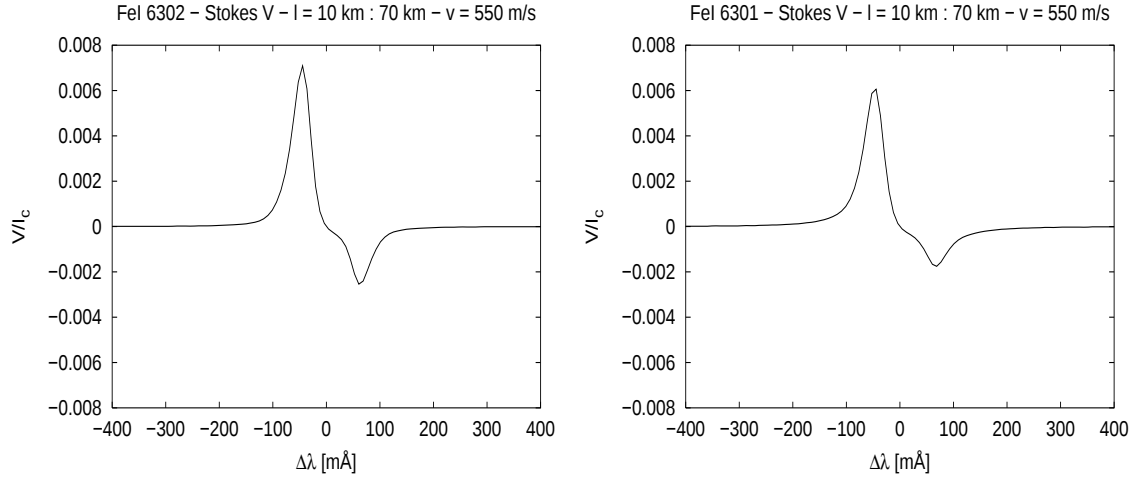


Abb. 9.7: Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der beiden Eisenlinien Fe I 6302 Å (links) und Fe I 6301 Å (rechts) in einer Atmosphäre mit einer Korrelationslänge von $l = 10$ km für Subkilogauss-Strukturen und $l = 70$ km für Kilogauss-Strukturen. Zusätzlich besitzen die feldfreien Strukturen gegenüber den magnetischen Strukturen eine Nettogeschwindigkeit von 550 m/s.

Um dies hier an einem einfachen Beispiel zu demonstrieren, wird eine resultierende Geschwindigkeit der unmagnetisierten Strukturen angenommen. Diese sollen eine abwärtsgerichtete Nettogeschwindigkeit von 550 m/s aufweisen. Es zeigt sich aus den Abbildungen 9.7 und 9.8 wieder sehr schön der Effekt einer endlichen Korrelationslänge. Wie bereits in Kapitel 7 beschrieben, tragen auch hier die unmagnetisierten Strukturen in der langwelligen σ -Komponente des Stokes-V-Profiles zu einer deutlichen Minderung des Signals bei. Dadurch, dass die feldfreien Strukturen eine Doppler-Verschiebung aufweisen, findet eine gegenüber den Profilen der magnetisierten Strukturen unsymmetrische Absorption statt, was zu einer einseitigen Reduzierung des Stokes-V-Profiles und zu einer nicht verschwindenden Netto-Zirkular-Polarisation führt.

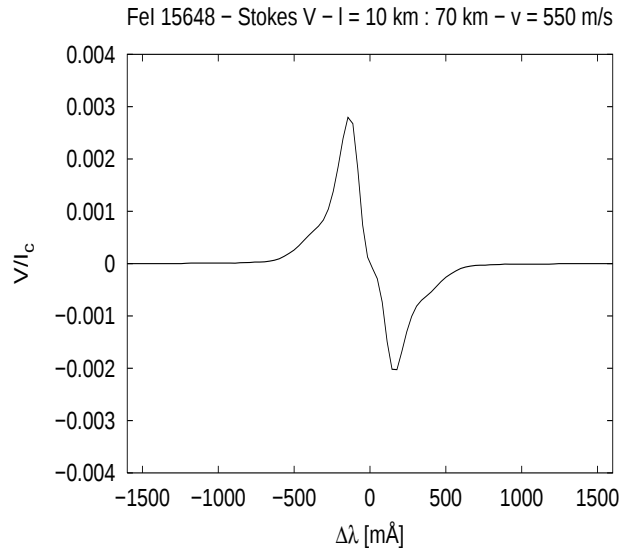


Abb. 9.8: Darstellung der aus den Modellrechnungen resultierenden Stokes-V-Profile der Eisenlinien Fe I 15648 Å mit gleicher Atmosphärenstruktur wie auch in Abbildung 9.7 beschrieben.

Somit zeigt sich aus den Modellrechnungen, dass das hier vorgestellte stochastische Modell mit einer kontinuierlichen Verteilung der Magnetfeldstärken qualitativ die Diskrepanz

von Magnetfeldstärkemessungen aus Absorptionslinien des sichtbaren und des infraroten Wellenlängenbereiches gut erklären kann. Dies steht auch im Einklang mit den Modellrechnungen von Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003). Weiterhin ergibt sich aus dem hier verwendeten stochastischen Modell auch, dass mit der zusätzlichen Berücksichtigung der strukturellen Ausdehnungen, ein mit den Beobachtungen auch quantitativ gut übereinstimmender Wert für den Füllfaktor sowie für die magnetische Flussdichte erzielt werden kann. Darüber hinaus können mit diesem Modell ebenfalls die von Khomenko et al. (2003) erhaltenen Stokes-V-Profile der infraroten Eisenlinie Fe I 15648 Å mit angehobenen Flanken erklärt werden. Dies läßt sich, anhand des stochastischen Modells, darauf zurückführen, dass stärkere Magnetfeldstrukturen eine größere Korrelationslänge aufweisen. Weiterhin kann durch eine differentielle Geschwindigkeit der magnetischen Strukturen sowie der Berücksichtigung von räumlichen Korrelationseffekten in einfacher Weise die häufig beobachtete Asymmetrie von Stokes-Profilen in der ruhigen Sonne erklärt werden.

Die wahre Natur der ruhigen Sonne ist sicherlich weitaus komplizierter, als dass es das hier verwendete einfache stochastische Modell wiederzugeben vermag. So wird es in Zukunft von besonderem Interesse sein, Modellrechnungen der Magnetokonvektion (Emonet & Cattaneo, 2001; Vögler & Schüssler, 2003) und die daraus erhaltenen Ergebnisse, mit denen aus der Beobachtung zu vergleichen, um so eine genauere Kenntniss über die magnetische Struktur der ruhigen Sonne zu erhalten. Der in dieser Arbeit entwickelte stochastische polarisierte Strahlungstransport bietet sich dabei besonders an, um die oftmals aus magnetokonvektiven Simulationen erhaltenen dynamischen und turbulenten atmosphärischen Eigenschaften zu beschreiben und darauf aufbauend synthetische Stokes-Profile zu berechnen.

Kapitel 10

Ausblick: Inversion von Stokes-Profilen

Abschließend soll hier ein kurzer Ausblick gegeben werden, wie auf der Basis des hier erarbeiteten stochastischen Strahlungstransports für polarisiertes Licht aus beobachteten Stokes-Profilen eine Rückführung auf die zugrundeliegenden atmosphärischen Parameter, also eine Inversion, erreicht werden kann.

10.1 Konventionelle Inversion

Zunächst soll die Frage untersucht werden ob sich der hier beschriebene stochastische Formalismus dazu eignet, eine konventionelle Inversion in Form einer Anpassung von beobachteten Stokes-Profilen an ein theoretisches Modell mit Hilfe eines Ausgleichsverfahrens durchzuführen. Basierend auf der genaueren Methode, die für das Suchverfahren im Parameterraum des Modells genutzt wird, werden die ersten Ableitungen bzw. zusätzlich die zweiten Ableitungen der gesuchten Modellparameter benötigt. Aufgrund der in Kapitel 3 und 4 beschriebenen Eigenschaften ist deutlich geworden, dass die benötigten Ableitungen des parametrisierten Strahlungstransportmodells wie beim konventionellen Strahlungstransportmodell ohne weiteres berechnet werden können. Es zeigte sich darüber hinaus, dass durch die Formulierung der formalen Lösung in Abschnitt 4.1 und den Response-Funktionen in Abschnitt 4.4 innerhalb des stochastischen Strahlungstransports eine Inversion auf der Basis von Response-Funktionen leicht zu realisieren ist. Unabhängigkeit von dem verwendeten Verfahren (z.B. Levenberg-Marquardt oder Newton-Verfahren o.ä.) ist der Ausgangspunkt für die Beschreibung des iterativen Optimierungsverfahrens oftmals die aus der Maximum-Likelihood-Lösung resultierende Fehlerfunktion

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_k^{Obs}(\lambda_i) - \langle I_k^{Syn}(\lambda_i; a_1, \dots, a_m) \rangle}{\sigma_i} \right)^2, \quad (10.1)$$

welche den quadratischen Fehler zwischen den beobachteten Stokes-Parametern I_k^{Obs} und den auf der Basis des theoretischen Modells synthetisch berechneten Stokes-Parametern I_k^{Syn} ausdrückt. Man beachte hierbei, dass die mit der Beobachtung vergleichbare Größe,

also die Observable des Modells, durch den Erwartungswert gegeben wird. In obiger Gleichung sind λ_i die diskreten Wellenlängenpunkte des Stokes-Parameter I_k und σ_i den für jeden Wellenlängenpunkt aus der Beobachtung erwarteten Fehler. Um den quadratischen Fehler zu minimieren, drücken wir zunächst in erster Ordnung die Veränderung der Funktion χ^2 aus,

$$\delta\chi^2 = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_k^{Obs}(\lambda_i) - \langle I_k^{Syn}(\lambda; a_1, \dots, a_m) \rangle}{\sigma_i} \right) \delta \langle I_k^{Syn}(\lambda; a_1, \dots, a_m) \rangle. \quad (10.2)$$

Dabei ist $\delta I_k^{Syn}(\lambda; a_1, \dots, a_m)$ die Veränderung des synthetischen Stokes-Parameters I_k in erster Ordnung, der aus der Variation des Modellparameters a_i resultiert. Benutzen wir jetzt die aus dem Abschnitt 4.4 hergeleitete allgemeine Form der Veränderung für den Erwartungswert des Stokes-Vektor in erster Ordnung gemäß der Gleichung (4.55), dann kann Gleichung (10.2) in folgender Form geschrieben werden:

$$\delta\chi^2 = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left(\frac{I_k^{Obs}(\lambda_i) - \langle I_k^{Syn}(\lambda; a_1, \dots, a_m) \rangle}{\sigma_i} \right) \delta Y_{B_j^*}^k(\lambda; a_1, \dots, a_m) p_{B_j^*}. \quad (10.3)$$

Hierbei ist $\delta Y_{B_j^*}^k(\lambda; a_1, \dots, a_m)$ die Veränderung des bedingten Stokes-Parameters in erster Ordnung und $p_{B_j^*}$ der diskrete Wahrscheinlichkeitswert des j -ten Atmosphärenregimes. Die aus einer kleinen Veränderung des l -ten atmosphärischen Parameters resultierende Veränderung des k -ten bedingten Stokes-Parameter $\delta Y_{B_j^*}^k(s)$ im j -ten atmosphärischen Regime lautet dabei wie folgt:

$$\delta Y_{B_j^*}^k(s) = \sum_{l=1}^m \int_{-\infty}^s R_j^k(s, s') \delta a_l ds'. \quad (10.4)$$

Die Gleichung (10.3), ausgedrückt mit Hilfe der Beziehung (10.4), bildet den zentralen Ausdruck für das iterative Minimierungsverfahren, mit dessen Hilfe die Berechnungen der Gradienten und der approximierten Hesse-Matrix erfolgen kann. Besonders interessant bei der stochastischen Modellbeschreibung ist die Möglichkeit, durch die Spezifikation der Korrelationslänge mit einer Inversion von beobachteten Stokes-Profilen direkt Aussagen über die mittlere Ausdehnung der zugrunde liegenden magnetischen Strukturen zu erhalten.

10.2 Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen

Da herkömmliche Inversionsalgorithmen durch die hohe Anzahl von freien Parametern und die Komplexität des Strahlungstransports oft die Tendenz haben nicht eindeutig in den erzeugten Lösungen sowie numerisch instabil bezüglich verrauschter Daten zu sein, also schlecht gestellt im allgemeinsten Sinne (Press et al., 1992), stellt sich die Frage, ob andere Inversionsmethoden den Prozess der Fehlerminimierung im Parameterraum unterstützen können. Ein vielversprechender Ansatz wurde von Carroll (2000) und Carroll & Staude (2001a, 2001b, 2001c) vorgestellt, die eine Inversion von Stokes-Profilen mit der Hilfe von künstlichen neuronalen Netzen beschreiben. Bei künstlichen neuronalen Netzen handelt es sich um biologisch motivierte mathematische Modelle von Funktionennetzen (Roja, 1993).

Diese Funktionennetze bzw. Approximationsnetze sind in der Lage, ihre inneren freien Parameter anhand eines zugrunde liegenden Datenmodells derart einzustellen, dass der in den Daten empirisch vorhandene funktionale Zusammenhang approximiert werden kann. Theoretisch besitzen neuronale Netze sogar die Möglichkeit, jede funktionale Beziehungen beliebig genau zu approximieren (Hornik et al., 1989). In der Praxis wird diese potenzielle Fähigkeit aber durch die Unvollständigkeit der Daten, die den funktionalen Zusammenhang repräsentieren, sowie durch den zur Anpassung des neuronalen Netzes verwendeten Optimierungsalgorithmus beeinträchtigt. Trotzdem wird in vielen Anwendungsfällen eine gute bis sehr gute Approximation des zugrundeliegenden Sachverhalts erreicht (Bishop, 1995). Um bei der Beschreibung weniger den biologischen Aspekt als vielmehr das mathematische Modell in den Vordergrund zu stellen, läßt sich das Modell eines künstlichen neuronalen Netzes vom Typ eines sogenannten Multi-Layer-Perceptron (Bishop, 1995) als parametrisiertes Modell mit einer verdeckten Schicht wie folgt beschreiben:

$$y_k(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = g_k \left(\sum_{j=0}^M w_{kj}^{(2)} g_j \left(\sum_{i=0}^L w_{ji}^{(1)} x_i \right) \right) . \quad (10.5)$$

Hierbei ist $y_k(\mathbf{x})$ der Wert des k -ten Elements des Ausgabevektors bzw. der Ausgabeschicht der Netzfunktion bei Vorgabe des Eingabevektors $\mathbf{x}$. Die adaptiven Netzwerkparameter, auch Netzwerkgewichte genannt, sind mit w_{kj} gekennzeichnet. Die Indizes der Netzwerkgewichte kennzeichnen dabei die gerichtete Kante zwischen der Schicht k und Schicht j . Die in der Literatur oft benutzte Beschreibung neuronaler Netze als gerichtete Graphen ist dabei äquivalent zu der Formulierung (10.5). Mit g_i sind in 10.5 die sogenannten Aktivierungsfunktionen gekennzeichnet. In dieser ersten Anwendung wird die häufig benutzte Aktivierungsfunktion in Form einer Sigmoid-Funktion verwendet, die wie folgt definiert ist:

$$g(a) = \frac{1}{1 + \exp(-a)} . \quad (10.6)$$

Der sogenannte Lernprozess oder das Training, bei dem anhand der Gegenüberstellung von Eingangsdatenvektor $\mathbf{x}^i$ und Zieldatenvektor $\mathbf{t}^i$ aus einer Datenbasis der zugrundeliegende funktionale Zusammenhang *erlernt* wird, wird mittels einer Anpassung des parametrisierten Modells (10.5) erreicht. Auch hier wird die Anpassung durch die Minimierung des quadratischen Fehlers zwischen den Ausgabevektoren $\mathbf{y}$ der Netzfunktion und den Zieldatenvektoren $\mathbf{t}^i$ der Datenbasis erzielt,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^c \{y_k(\mathbf{x}^n; \mathbf{w}) - t_k^n\}^2 . \quad (10.7)$$

Carroll & Staude (2001a) beschreiben, wie ein Multi-Layer-Perceptron dazu genutzt werden kann, anhand einer synthetischen Datenbasis von Stokes-Vektoren den inversen funktionalen Zusammenhang zwischen den Stokes-Vektoren und den zugrunde liegenden atmosphärischen Parametern zu approximieren. Mit der so gewonnenen Approximation des inversen Problems lassen sich gemessene Stokes-Spektren analysieren und die atmosphärischen Parameter wie Magnetfeldvektor, Sichtliniengeschwindigkeit oder Mikroturbulenz berechnen (Carroll et al., 2002). Die Anwendung solcher Multi-Layer-Perceptronen umfaßt nicht nur typische Approximationsaufgaben, bei denen auf der Grundlage einer Datenbasis

ein komplexer nichtlinearer funktionaler Zusammenhang approximiert werden soll, sondern auch Anwendungen der Klassifizierung. Hierbei werden anhand vorliegender Daten bestimmte Merkmale in den Eingangsvektoren bestimmten Klassen zugeordnet. Bei Carroll et al. (2001c) wird ein Multi-Layer-Perceptron eingesetzt, um typische Merkmale verschiedener semi-empirischer Temperatur- und Druckmodelle anhand von Stokes-Profilen zu unterscheiden.

Diese Fähigkeiten, die typischerweise in der Mustererkennung (Bishop, 1995) Anwendung finden, wurden hier für eine exemplarische Anwendung genutzt, bei der es um die Charakterisierung von Stokes-Profilen geht, die auf der Basis des hier beschriebenen stochastischen Modells erzeugt wurden. Wesentliche Motivation für diese erste Anwendung war es der Frage nachzugehen, ob neuronale Netze in der Lage sind, anhand der Stokes-Profile Aussagen über die mittlere Ausdehnung der magnetischen Strukturen zu treffen, und das, obwohl eine Vielzahl anderer atmosphärischer Parameter beliebig variiert werden. Es soll also untersucht werden, ob trotz der zahlreichen und beliebigen Veränderungen der anderen atmosphärischen Parameter, der Informationsgehalt über die Korrelationslänge in den Stokes-Vektoren erhalten bleibt.

Auf der Grundlage eines einfachen stochastischen 2-Komponenten-Systems, wie auch in Abschnitt 7 beschrieben, wurden Stokes-Profile für eine Trainingsdatenbasis generiert, wobei die zugrundeliegenden atmosphärischen Parameter zufällig aus verschiedener Parameterintervallen ausgewählt wurden. Für die Parameterintervalle gelten dabei: Magnetfeldstärke [1000 G - 2000 G], Inklination [0° - 30°] und Sichtliniengeschwindigkeiten [0 m/s - 1000 m/s]. So wurden 3000 Stokes-Profile der Eisenlinie Fe I 6302 Å berechnet mit Korrelationslängen zwischen 10 km und 150 km sowie 3000 weitere Stokes-Profile mit Korrelationslängen von 200 km bis 500 km. Das Multi-Layer-Perceptron wurde dabei als Klassifikator trainiert (Carroll, 2000) wobei es eine Unterscheidung treffen soll, ob ein vorliegendes und unbekanntes Stokes-Profil, bestehend aus den Stokes-Parametern I und V , in einer Atmosphäre mit einer zugrunde liegenden strukturellen Ausdehnung kleiner 200 km oder größer 200 km generiert wurde.

Nachdem verschiedene Netzwerkarchitekturen des Multi-Layer-Perceptron mit diesen insgesamt 6000 Stokes-Profilen trainiert wurden, ist das Netzwerk mit den besten Trainingsergebnissen, d.h. dem kleinsten quadratischen Fehler gemäß (10.7), für die Anwendung mit 1000 Testprofilen, die unabhängig von der Trainingsdatenbasis erzeugt wurden, ausgewählt worden. Die 1000 Testprofile wurden unter denselben atmosphärischen Randbedingungen generiert wie die Trainingsdaten, insbesondere liegen die gleichen Parameterintervalle zugrunde. Die Auswertung der anhand der Testprofile berechneten Ergebnisse erfolgte gemäß Bishop (1995), wobei der Ausgabewert direkt als Approximation der a-posteriori-Wahrscheinlichkeit interpretiert wird und somit die Klassenzugehörigkeit bestimmt werden kann. In mehr als 95% aller Fälle konnte das neuronale Netz eine korrekte Unterscheidungen treffen. Obwohl die Stokes-Profile aus beliebigen Parameterkonfigurationen entsprechend den obigen Intervallen für die atmosphärischen Parameter entstanden sind, bleibt der Informationsgehalt der Stokes-Profile über die zugrundeliegende Korrelationslänge weitgehend erhalten, um eine Unterscheidung zwischen den Profilen zu treffen.

Obwohl diese erste Klassifizierung mit einem Multi-Layer-Perceptron auf einem relativ einfachen stochastischen Modell beruht, zeigen diese ersten Ergebnisse als auch die Ergebnisse von Carroll & Staude (2003), dass eine Inversion von Stokes-Profilen selbst aus komplexen stochastischen Atmosphären mit neuronalen Netzen als auch mit konventionellen Methoden aussichtsreich erscheint.

Kapitel 11

Zusammenfassung

Der weitgehend unbekannte und oftmals turbulente Charakter des kleinskaligen Magnetfeldes der Photosphäre und die Frage, ob und wie diese strukturellen Eigenschaften ihre Spuren im Stokes-Spektrum hinterlassen, ist die wesentliche Motivation für die vorliegende Arbeit. Trotz der heutigen hoch entwickelten Beobachtungstechniken, entziehen sich noch immer eine Vielzahl magnetischer Strukturen einer direkten Auflösung, sodass sich deren wahre Natur nicht direkt erschließen läßt. So sind wir auch heute noch fast ausschließlich auf indirekte Methoden angewiesen, die uns in Form von Spektrallinien sowie deren Profilen, Informationen über das kleinskalige Magnetfeld innerhalb der Sonnenatmosphäre liefern. Die durch spektropolarimetrische Messungen gewonnenen Daten erlauben es, aufgrund ihrer immer höheren spektralen Auflösung bei gleichzeitig immer besseren Signal- zu Rauschverhältnissen, selbst kleinste Effekte im resultierenden Linienprofil auf ihre Ursachen hin zu untersuchen. Der so erhaltene Informationsgewinn, der auch Rückschlüsse auf die atmosphärischen Strukturen im Entstehungsgebiet der untersuchten Spektrallinie erlaubt, erfordert jedoch auch eine angemessene Interpretation. Der in dieser Arbeit entwickelte stochastische Strahlungstransport für polarisiertes Licht eröffnet die Möglichkeit, neben der statistischen Wahrscheinlichkeit der atmosphärischen Strukturen, auch deren endliche Ausdehnung bei der Modellierung mit in Betracht zu ziehen und deren Einfluß beim Prozess der Linienentstehung zu untersuchen.

Transport polarisierter Strahlung in stochastischen Magnetfeldern

In Kapitel 3 wurden die Grundlagen zur Beschreibung einer auf variablen Skalen fluktuierenden Atmosphäre mit Hilfe eines stochastischen Prozesses gelegt. Basierend auf dieser Beschreibung und der Kopplung des Strahlungstransports mit den strukturellen und physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre, ließ sich der Strahlungstransport selbst als stochastischer Prozess formulieren. So gelingt es, in einer stochastisch organisierten Atmosphäre, beliebige Ausdehnungen (Korrelationslängen) der Strukturelemente mit zu berücksichtigen. Die so gewonnene Integro-Differentialgleichung ermöglicht in effizienter Weise die Berechnung des, mit der Beobachtung vergleichbaren, Erwartungswertes des Stokes-Vektors. Selbst bei einer hochgradig fluktuierenden Strukturierung der Atmosphäre, ist die numerische Lösung keinen Unstetigkeiten unterworfen und erlaubt eine genaue Berechnung des beobachtbaren Erwartungswertes des Stokes-Vektors.

Eigenschaften des stochastisch polarisierten Strahlungstransports

Im Kapitel 4 wurde gezeigt, wie der entwickelte stochastische Strahlungstransport für eine verschwindende Korrelationslänge gegen den vereinfachten Strahlungstransport unter mikroturbulenten Verhältnissen konvergiert und für eine Korrelationslänge gegen unendlich gegen den makroturbulenten Fall. So beinhaltet der stochastische Formalismus beide Betrachtungsweisen als spezielle Grenzfälle. Es wurde weiterhin gezeigt, wie es im Rahmen des stochastischen Strahlungstransports für polarisiertes Licht, zur Entstehung einer Netto-Zirkular-Polarisation kommt und diese massgeblich durch die Korrelationslänge der zugrundeliegenden magnetischen Strukturen beeinflusst wird. Dieses Kapitel zeigte auch, dass analog zur herkömmlichen Beschreibung des polarisierten Strahlungstransports auch für die stochastische Transportgleichung eine formale Lösung angegeben werden kann. Ebenfalls ist die Formulierung von Response-Funktionen möglich, welche insbesondere bei der Diagnostik und Inversion von Stokes-Profilen eine bedeutende Rolle spielen.

Mesoturbulenz

In den Modellrechnungen in Kapitel 6 zeigt sich, dass der hier entwickelte stochastische Ansatz ebenfalls eine Beschreibung des Strahlungstransports in mesoturbulenten Geschwindigkeitsfeldern erlaubt. Dies wurde durch Modellrechnungen anhand der magnetisch nicht aufspaltenden Eisenlinie Fe I 5567 Å gezeigt. Hier zeigt sich auch, wie der vorgestellte mesoturbulente Ansatz für eine mittlere Strukturlänge (Korrelationslänge) kleiner als 10 km zum mikroturbulenten Fall und für eine Korrelationslänge oberhalb 1000 km zum makroturbulenten Fall konvergiert. So zeigt sich insbesondere, dass es zwischen dem mikroskopischen (Mikroturbulenz) und dem makroskopischen Grenzfall (Makroturbulenz) einen weiten Bereich von strukturellen Ausdehnungen gibt, für die weder die Mikroturbulenz noch die Makroturbulenz eine adequate Beschreibung ermöglichen. Gerade im Hinblick auf die oftmals benutzte Kombination von Mikroturbulenz und Makroturbulenz für die Anpassung gemessener Profile an ein synthetisches Modell, muss hier kritisch hinterfragt werden, welche Informationen durch Verwendung dieser adhoc definierten Verbreiterungsmechanismen der Analyse verloren gehen bzw. zu falschen Interpretationen führen. Dieses gilt umso mehr, wenn die zugrundeliegende Strukturierung weniger aus dem turbulenten hydrodynamischen Verhalten der Konvektion herrührt, als vielmehr durch eine kleinskalige magnetische Strukturierung der Atmosphäre verursacht wird.

Mesoturbulente Magnetfelder

Auf der Basis eines stochastischen 2-Komponenten-Modells mit magnetischen und unmagnetischen Strukturen wurde in Kapitel 7 der Einfluss der Korrelationslänge auf die resultierenden Stokes-V-Profile sowie die daraus abgeleitete Netto-Zirkular-Polarisation mit Hilfe von Modellrechnungen untersucht. Die magnetischen Strukturen entsprechen dabei dünnen magnetischen Flussröhren, deren Ausdehnung, projiziert auf die Sichtlinie, durch die Korrelationslänge bestimmt wird. Auch hierbei treten deutliche Effekte, bedingt durch eine Variation der Korrelationslänge, auf. Insbesondere durch die Verwendung der Netto-Zirkular-Polarisation, der statistischen Streuwahrscheinlichkeiten und der Response-Funktionen für die Korrelationslängen konnte deutlich gezeigt werden, wie wichtig die Effekte einer endlichen Korrelation der atmosphärischen Strukturen auch unterhalb der mittleren freien Weglänge von Photonen sind. Auch konnte gezeigt werden, wie die Beschreibung einer mikrostrukturierten magnetischen Atmosphäre, wie sie von Sanchez

Almeida et al. (1996) mit dem MISMA-Modell vorgeschlagen wurde, nur einen sehr eingeschränkten Anwendungsbereich besitzt. Es zeigt sich bereits für Strukturen mit einer Korrelationslänge von über 10 km eine schnelle Abnahme des mikroturbulenten Charakters in den Stokes-Spektren. Auf der anderen Seite, nähert sich das resultierende Stokes-Spektrum erst für Strukturlängen oberhalb von 1000 km, dem des magnetisch makroturbulenten an. So erstreckt sich auch hier ein weiterer Bereich von Korrelationslängen, für den weder der mikrostrukturierte noch der makrostrukturierte Ansatz, eine angemessene Beschreibung der atmosphärischen Verhältnisse und des Strahlungstransports ermöglichen. Der stochastische Strahlungstransport für polarisiertes Licht bietet somit nicht nur einen allgemeineren für Mesostrukturen gültigen Strahlungstransport, mit der Einführung der Korrelationslänge und der beschreibenden Wahrscheinlichkeitsdichte, bietet er zudem zusätzliche diagnostische Parameter, die einen wesentlichen Informationsgewinn für die Interpretation von Stokes-Spektren bedeuten können.

Zur Struktur der Penumbra

In Kapitel 8 wurde auf der Basis einer einfachen stochastischen Penumbra-Atmosphäre eine synthetische Beobachtung unter verschiedenen heliozentrischen Winkeln durchgeführt, um eine Mitte-Rand-Variation zu simulieren. Dabei wurde auf der Grundlage der beobachtbaren Eigenschaften der Filamentstruktur angenommen, dass die Penumbra-Atmosphäre durch eine stochastische Anordnung von magnetischen Flussröhren beschrieben werden kann. Die mittlere Ausdehnung dieser Flussröhrenstrukturen, entlang der Sichtlinie, wird durch die Korrelationslänge innerhalb des stochastischen Strahlungstransports bestimmt. Als Linienparameter wurde hierbei wieder die Netto-Zirkular-Polarisation des Stokes-V-Profiles der Eisenlinie Fe I 6302 Å gewählt. Die charakteristischen Verläufe der Netto-Zirkular-Polarisation mit dem heliozentrischen Winkel zeigen eine deutliche Abhängigkeit von der Korrelationslänge. Je größer die Korrelationslänge ist, umso kleiner fällt der Maximalwert der Netto-Zirkular-Polarisation aus und umso flacher verläuft die Kurve der Netto-Zirkular-Polarisation mit dem heliozentrischen Winkel. Da die Entstehung der Netto-Zirkular-Polarisation zum großen Teil durch den Delta-Gamma-Effekt bestimmt wird, ist davon auszugehen, dass die mittleren Ausdehnungen der magnetischen Strukturen innerhalb der Penumbra sehr kleinskaliger Natur sind.

Sicherlich lassen sich auf der Basis dieses sehr einfachen stochastischen Modells keine allgemeingültigen Aussagen über die Penumbra machen, nicht zuletzt deswegen weil hier ein isothermes Modell benutzt wurde. So wäre es jedoch gerade für zukünftige Anwendungen im Rahmen des stochastischen Strahlungstransports von besonderem Interesse auch Temperatur- und Druckfluktuationen und somit auch Opazitätsschwankungen zu berücksichtigen.

Magnetfeldstrukturen in der ruhigen Sonne

Als eine weitere Anwendung des stochastischen Strahlungstransports wurde in Kapitel 9 ein einfaches Modell eines ruhigen Internetzwerkgebietes simuliert. In Anlehnung an die Modellrechnungen von Socas-Navarro & Sanchez Almeida (2003) wird auch hier ein Mechanismus untersucht, der eine Erklärung für die unterschiedlichen Ergebnisse der Magnetfeldstärkebestimmung liefert, wie sie anhand von Linien im sichtbaren und im infraroten Wellenlängenbereich ermittelt wurden. Für die Modellrechnungen wurden die im Infraroten liegende Eisenlinie Fe I 15648 Å und das im sichtbaren Wellenlängenbereich liegende

Linienpaar mit den beiden Eisenlinien Fe I 6301 Å und Fe I 6302 Å benutzt. Neben dem unterschiedlichen Verhalten bei der Zeeman-Aufspaltung spielt für die unterschiedliche Magnetfeldbestimmung für Linien im sichtbaren und im infraroten Wellenlängenbereich eine kontinuierliche Verteilung von Magnetfeldstärken eine entscheidende Rolle. Gleichzeitig ist dabei jedoch wichtig, die Ausdehnung der Strukturen mit zu berücksichtigen. Es zeigt sich so, dass eine Makrostrukturierung zwar zu einer Diskrepanz zwischen den aus dem Linienpaar und der Infrarotlinie ermittelten Magnetfeldstärken führt, nicht jedoch zu den beobachteten Amplituden der Stokes-V-Profile sowie der magnetischen Flussdichten. Erst eine Mikrostrukturierung der Atmosphäre mit der Annahme, dass ein Teil der Verteilungsfunktion im niedrigen Feldstärkebereich zu keiner effektiven Feldstärke führt, zeigt, dass die Stokes-V-Amplituden, der Füllfaktor und die magnetische Flussdichte eine mit der Beobachtung übereinstimmende Größenordnung annehmen. Die zusätzliche Annahme, dass Strukturen mit Kilogauss-Feldstärken im Mittel größere Korrelationslängen aufweisen, führt in den infraroten Stokes-V-Profilen zu einer charakteristischen Anhebung der Flanken. Im sichtbaren Wellenlängenbereich hingegen tritt eine weitere Angleichung der Amplituden auf, was dazu führt, dass anhand des Linienpaars eine erhöhte Magnetfeldstärke ermittelt wird und die Diskrepanz der Magnetfeldbestimmung somit weiter zunimmt.

Auch hier gilt, dass das verwendete einfache Modell bei weitem nicht in der Lage ist die vielfältigen und komplexen Eigenschaften des Internetzwerkgebietes angemessen zu beschreiben. Dennoch sollten die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen verdeutlicht haben, dass räumliche Korrelationseffekte entlang der Sichtlinie einen nicht zu unterschätzenden Einfluß auf den Prozess der Linienentstehung und somit auch auf das resultierende Stokes-Spektrum haben.

Literaturverzeichnis

Auer, L. H.; Heasley, J. N.; House, L. L.: 1977, *The determination of vector magnetic fields from Stokes profiles*, Solar Physics 55, 47

Beckers, J. M.: 1969, *The Profiles of Fraunhofer Lines in the Presence of Zeeman Splitting. I: The Zeeman Triplet*, Solar Physics 9, 372

Bellot Rubio, L. R.; Balthasar, H.; Collados, M.; Schlichenmaier, R.: 2003, *Field-aligned Evershed flows in the photosphere of a sunspot penumbra*, A&A 403, 47

Bellot Rubio, L. R.; Ruiz Cobo, B.; Collados, M.: 2000, *Inversion of Stokes Profiles from Solar Magnetic Elements*, ApJ 535, 475

Bellot Rubio, L. R.; Ruiz Cobo, B.; Collados, M.: 1998, *An Hermitian Method for the Solution of Polarized Radiative Transfer Problems*, ApJ 506, 805

Bellot Rubio, L. R.; Ruiz Cobo, B.; Collados, M.: 1996, *Response functions for the inversion of data from unresolved solar magnetic elements.*, A&A 306, 960

Berger, T. E.; Lofdahl, M. G.; Shine, R. S.; Title, A. M.: 1998, *Measurements of Solar Magnetic Element Motion from High-Resolution Filtergrams*, ApJ 495, 973

Berger, T. E.; Title, A. M.: 1996, *On the Dynamics of Small-Scale Solar Magnetic Elements*, ApJ 463, 365

Bishop, C. M.: 1995, *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford University Press, Oxford

Buente, M.; Solanki, S. K.; Steiner, O.: 1993, *Centre-to-limb variation of the Stokes V asymmetry in solar magnetic flux tubes*, A&A 268, 736

Carroll, T. A.; Staude, J.: 2003, *Meso-structured magnetic atmospheres: Stochastic polarized radiative transfer and Stokes profile inversion*, Astronomische Nachrichten 324, No. 4, 392

Carroll, T. A.; Muglach K.; Balthasar H.: 2002, *Application of Artificial Neural Networks to Solar Infrared Stokes Spectra*, Il Nuovo Cimento, 25/506, 513

- Carroll, T. A.; Staude, J.: 2001a, *The inversion of Stokes profiles with artificial neural networks*, A&A 378, 316
- Carroll, T. A.; Staude, J.: 2001b, *Analysis and interpretation of Stokes profiles with artificial neural networks*, In Solar encounter. Proceedings of the First Solar Orbiter Workshop, Puerto de la Cruz, Tenerife, Spain. Eds.: B. Battrick & H. Sawaya-Lacoste, Scientific coordinators: E. Marsch, V. Martinez Pillet, B. Fleck & R. Marsden. ESA SP-493, Noordwijk: ESA Publications Division, ISBN 92-9092-803-4, 2001, p. 183
- Carroll, T. A.; Balthasar, H.; Muglach, K.; Nickelt, I. : 2001c, *Inversion of Stokes Profiles with Artificial Neural Networks*, Advanced Solar Polarimetry – Theory, Observation, and Instrumentation –, ASP Conference Proceedings, Vol. 236. Edited by Michael Sigwarth. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, p.511
- Carroll, T. A.: 2000, *Inversion und Analyse von Stokes-Linienprofilen mit künstlichen neuronalen Netzen und Response-Funktionen*, Diplomarbeit, Freie Universität Berlin
- Cattaneo, F.; Lenz, D.; Weiss, N.: 2001, *On the Origin of the Solar Mesogranulation*, ApJ 563, 91
- Cattaneo, F.: 2000, *The Solar Dynamos*, American Astronomical Society, SPD Meeting 31, 04.02; Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 32, p.83
- Cattaneo, F.: 1999, *On the Origin of Magnetic Fields in the Quiet Photosphere*, ApJ 515, 39
- Chapman, G. A.: 1979, *New models of solar faculae*, ApJ 232, 923
- del Toro Iniesta, J. C.; Collados, M.; Sanchez Almeida, J.; Semel, M.: 1990, *Spectropolarimetry of solar faculae - High spatial resolution results*, A&A 227, 591
- Ding, M. D.; Fang, C.: 1989, *A semi-empirical model of sunspot penumbra*, A&A 225, 204
- Domingez Cardena, I.; Sanchez Almeida, J.; Kneer, F.: 2003, *Inter-network magnetic fields observed with sub-arcsec resolution*, A&A 407, 741
- Domke, H.; Pavlov, G. G.: 1979, *Line formation in microturbulent magnetic fields*, Astrophysics and Space Science, 66, 47
- Emonet, T.; Cattaneo, F.: 2001, *Small-Scale Photospheric Fields: Observational Evidence and Numerical Simulations*, ApJ 560, 197
- Frazier, E. N.; Stenflo, J. O.: 1972, *On the Small-Scale Structure of Solar Magnetic Fields*, Solar Physics 27, 330

- Frisch, H.; Frisch, U.: 1976, *Non-LTE Transfer-II. Two-level atoms with stochastic velocity field*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 175, 157
- Frutiger, C.; Solanki, S. K.: 2001, *Empirical models of solar magnetic flux-tubes and their non-magnetic surroundings*, A&A 369, 646
- Gail, H. P.; Sedlmayr, E.: 1974, *Effects of correlated turbulent velocities on photospheric line formation*, A&A 36, 17
- Gail, H. P.; Hundt, E.; Kegel, W. H.; Schmid-Burgk, J.; Traving, G.: 1974, *Line Formation in Turbulent Media*, A&A 32, 65
- Gardiner, C. W.: 1985, *Handbook of stochastic Methods*, Springer Verlag
- Gingerich, O.; Noyes, R. W.; Kalkofen, W.; Cuny, Y.: 1971, *The Harvard-Smithsonian reference atmosphere*, Solar Physics 18, 347
- Grossmann-Doerth, U.; Schüssler, M.; Sigwarth, M.; Steiner, O.: 2000, *Strong Stokes V asymmetries of photospheric spectral lines: What can they tell us about the magnetic field structure?*, A&A 357, 351
- Grossmann-Doerth, U.; Keller, C. U.; Schuessler, M.: 1996, *Observations of the quiet Sun's magnetic field.*, A&A 315, 610
- Grossmann-Doerth, U.: 1994, *Height of formation of solar photospheric spectral lines*, A&A 285, 1012
- Hartj, B.; Kneer, F.: 2002, *Weak magnetic flux features on the Sun*, A&A 385, 264
- Holweger, H.; Mueller, E. A.: 1974, *The photospheric barium spectrum - Solar abundance and collision broadening of BA II lines by hydrogen*, Solar Physics 39, 19
- Honerkamp, J.: 1990, *Stochastische Dynamische Systeme*, VCH Verlag, Weinheim, Basel, Cambridge, New York
- Hornik, K.; Stinchcombe, M.; White, H.: 1989, *Multilayer-Feedforward Networks are Universal Approximators*, Neural Networks 2, 359
- Howard, R.; Stenflo, J. O.: 1972, *On the Filamentary Nature of Solar Magnetic Fields*, Solar Physics, 22, 402
- Illing, R. M. E.; Landman, D. A.; Mickey, D. L.: 1975, *Broad-band circular polarization of sunspots - Spectral dependence and theory*, A&A 41, 183
- Illing, R. M. E.; Landman, D. A.; Mickey, D. L.: 1974, *Observations of broad-band circular polarization in sunspots - Magnetic field correspondence*, A&A 37, 97

- Khomenko, E. V.; Collados, M.; Solanki, S. K.; Lagg, A.; Trujillo Bueno, J.: 2003, *Quiet-Sun inter-network magnetic fields observed in the infrared*, A&A 408, 1115
- Keil, S. L.; Rimmele, T. R.; Keller, C. U.: 2001, *The Advanced Technology Solar Telescope*, Advanced Solar Polarimetry – Theory, Observation, and Instrumentation – 20TH NSO/Sac Summer Workshop, ASP Conference Proceedings, Vol. 236. Edited by Michael Sigwarth. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific ISBN: 1-58381-073-0, 2001, p.597
- Kneer, F.; Trujillo-Bueno, J.: 1987, *Multidimensional radiative transfer in stratified atmospheres*, A&A 183, 91
- Knölker, M.; Schuessler, M.; Weisshaar, E.: 1988, *Model calculations of magnetic flux tubes. III - Properties of solar magnetic elements*, A&A 202, 275
- Landi Degl’Innocenti, E.: 1994, *Recipes for Solar Polarimetry*, R.J. Rutten and C.J. Schrijver (eds.), Solar Surface Magnetism, Kluwer Academic Publishers. Netherlands, p.29
- Landi Degl’Innocenti, E.; Landi Degl’Innocenti, M.: 1985, *On the solution of the radiative transfer equations for polarized radiation*, Solar Physics 97, 239
- Landi Degl’Innocenti, E.; Landolfi, M.: 1983, *Asymmetries in Stokes profiles of magnetic lines - A linear analysis in terms of velocity gradients*, Solar Physics 87, 221
- Landi Degl’Innocenti, E.; Landi Degl’Innocenti, M.: 1977, *Response functions for magnetic lines*, A&A 56, 111
- Landi Degl’Innocenti, E.: 1976, *MALIP - a programme to calculate the Stokes parameters profiles of magnetoactive Fraunhofer lines*, A&AS 25, 379
- Landi Degl’Innocenti, E.; Landi degl’Innocenti, M.: 1972, *Quantum Theory of Line Formation in a Magnetic Field*, Solar Physics 27, 319
- Landolfi, M.; Landi Degl’Innocenti, E.: 1996, *Net Circular Polarization in Magnetic Spectral Lines Produced by Velocity Gradients: Some Analytical Results*, Solar Physics 164, 191
- Lin, H.; Rimmele, T.: 1999, *The Granular Magnetic Fields of the Quiet Sun*, ApJ 514, 448
- Livingston, W. C.; Harvey, J.: 1975, *A New Component of Solar Magnetism - The Inner Network Fields*, Bulletin of the American Astronomical Society 7, 346
- Lopez Ariste, A.: 2002, *On the Asymmetry of Stokes Profiles*, ApJ 564, 379
- Lopez Ariste, A.; Semel, M.: 1999, *DIAGONAL: A numerical solution of the Stokes transfer equation*, A&AS 139, 417

- Maltby, P.: 1964, *On the velocity field in sunspots*, *Astrophisica Norvegica* 8, 205
- Martinez Pillet, V.: 2000, *Spectral signature of uncombed penumbral magnetic fields*, *A&A* 361, 734
- Martinez Pillet, V.: 1997, *Polarimetric Measurements of Sunspots*, 1st Advances in Solar Physics Euroconference. Advances in Physics of Sunspots, ASP Conf. Ser. Vol. 118., Eds.: B. Schmieder, J.C. del Toro Iniesta, & M. Vazquez, p. 212.
- Meyer, F.; Schmidt, H. U.: 1968, *A Model for the Evershed Flow in Sunspots*, *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft*, Vol. 25, p.194
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar atmospheres*, San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1978
- Müller, D. A. N.; Schlichenmaier, R.; Steiner, O.; Stix, M.: 2002, *Spectral signature of magnetic flux tubes in sunspot penumbrae*, *A&A* 393, 305
- Müller, D. A. N.: 2001, *Polarisation von Linien im Spektrum einer Sonnenfleck-Penumbra*, Diplomarbeit, Albert-Ludwig-Freiburg i.Brg.
- Parker, E. N.: 1976, *Basic properties of magnetic flux tubes and restrictions on theories of solar activity*, *Astrophysics and Space Science* 44, 107
- Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, A. T.: 1992, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge
- Rees, D. E.; Durrant, C. J.; Murphy, G. A.: 1989, *Stokes profile analysis and vector magnetic fields. II - Formal numerical solutions of the Stokes transfer equations*, *ApJ* 339, 1093
- Rees, D. E.: 1987, *A Gentle Introduction to Polarized Radiative Transfer*, Numerical Radiative Transfer, edited by Wolfgang Kalkofen. Cambridge: University Press, 1987., p.213
- Rimmele, T. R.: 1995, *Evidence for thin elevated evershed channels.*, *A&A* 298, 260
- Rojas, R.: 1993, *Theorie der neuronalen Netze*, Springer Verlag, Heidelberg
- Ruiz Cobo, B.; del Toro Iniesta, J. C.: 1994, *On the sensitivity of Stokes profiles to physical quantities*, *A&A* 283, 129
- Ruiz Cobo, B.; del Toro Iniesta, J. C.: 1992, *Inversion of Stokes profiles*, *ApJ* 398, 375

- Sanchez Almeida, J.; Domingez Cardena, I.; Kneer, F.: 2003, *Simultaneous Visible and Infrared Spectropolarimetry of a Solar Internetwork Region*, ApJ 597, 177
- Sanchez Almeida, J.; Emonet, T.; Cattaneo, F.: 2003, *Polarization of Photospheric Lines from Turbulent Dynamo Simulations*, ApJ 585, 536
- Sanchez Almeida, J.: 2001, *Thermal Relaxation of Very Small Solar Magnetic Structures in Intergranules: A Process That Produces Kilogauss Magnetic Field Strengths*, ApJ 556, 928
- Sanchez Almeida, J.: 2000, *Elusive Magnetic Structures in the Sun and Solar-Type Stars*, ApJ 544, 1135
- Sanchez Almeida, J.; Lites, B. W.: 2000, *Physical Properties of the Solar Magnetic Photosphere under the MISMA Hypothesis. II. Network and Internetwork Fields at the Disk Center*, ApJ 532, 1215
- Sanchez Almeida, J.; Trujillo Bueno, J.: 1999, *Radiative Transfer in Weakly Polarizing Media*, ApJ 526, 1013
- Sanchez Almeida, J.: 1998, *Optically Thin Irregularities in the Penumbrae of Sunspots*, ApJ 497, 967
- Sanchez Almeida, J.: 1997, *Physical Properties of the Solar Magnetic Photosphere under the MISMA Hypothesis. I. Description of the Inversion Procedure*, ApJ 491, 993
- Sanchez Almeida, J.; Landi Degl'Innocenti, E.; Martinez Pillet, V.; Lites, B. W.: 1996, *Line Asymmetries and the Microstructure of Photospheric Magnetic Fields*, ApJ 466, 537
- Sanchez Almeida, J.; Lites, B. W.: 1992, *Observation and interpretation of the asymmetric Stokes Q, U, and V line profiles in sunspots*, ApJ 398, 359
- Sanchez Almeida, J.; Collados, M.; del Toro Iniesta, J. C.: 1989, *On the generation of the net circular polarization observed in solar faculae*, A&A 222, 311
- Sanchez Almeida, J.; Collados, M.; del Toro Iniesta, J. C. : 1988, *An explanation for the Stokes V asymmetry in solar faculae*, A&A 201, 37
- Scharmer, Göran B.; Gudiksen, Boris V.; Kiselman, Dan; Löfdahl, Mats G.; Rouppe van der Voort, Luc H. M.: 2002, *Dark cores in sunspot penumbral filaments*, Nature, Volume 420, Issue 6912, pp. 151-153
- Schlichenmaier, R.: 2002, *Penumbral fine structure: Theoretical understanding*, Astronomische Nachrichten 323, no. 3/4, 303
- Schlichenmaier, R.; Soltau, D.; Lühe, O. v. D.; Collados, M.: 2001, *Penumbral Stokes-V Asymmetries of Fe I 1564.8 nm*, Advanced Solar Polarimetry – Theory,

Observation, and Instrumentation – 20TH NSO/Sac Summer Workshop, ASP Conference Proceedings, Vol. 236. Edited by Michael Sigwarth. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific ISBN: 1-58381-073-0, 2001, p.579

Schlichenmaier, R.; Jahn, K.; Schmidt, H. U.: 1998, *A Dynamical Model for the Penumbra Fine Structure and the Evershed Effect in Sunspots*, ApJ 493, 121

Schmidt, W.; Schlichenmaier, R.: 2000, *Small-scale flow field in a sunspot penumbra*, A&A 364, 829

Schüssler, M.: 1986, *MHD Models of Solar Photospheric Magnetic Flux Concentrations*, Small Scale Magnetic Flux Concentrations in the Solar Photosphere, Proceedings of a Workshop held in Göttingen, Edited by W. Deinzer, M. Knllker, and H.H. Voigt. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1986., p.103

Schwarz H. R.: 1988, *Numerische Mathematik*, Teubner Verlag, Stuttgart

Semel, M.: 1967, *Contribution a l'etude des champs magnetiques dans les regions actives solaires*, Annales d'Astrophysique, Vol. 30, p.513

Sigwarth, M.: 2001, *Properties and Origin of Asymmetric and Unusual Stokes V Profiles Observed in Solar Magnetic Fields*, ApJ 563, 1031

Sigwarth, M.; Balasubramaniam, K. S.; Knlker, M.; Schmidt, W.: 1999, *Dynamics of solar magnetic elements*, A&A 349, 941

Skumanich, A.; Lites, B. W.: 1987, *Stokes profile analysis and vector magnetic fields. I - Inversion of photospheric lines*, ApJ 322, 473

Socas-Navarro, H., Sanchez Almeida J.: 2003, *Magnetic Fields in the Quiet Sun: Observational Discrepancies and Unresolved Structure*, ApJ 593, 581

Socas-Navarro, H.; Snchez Almeida, J.: 2002, *Magnetic Properties of Photospheric Regions with Very Low Magnetic Flux*, ApJ 565, 1323

Solanki, S. K.; Montavon, C. A. P.: 1993, *Uncombed fields as the source of the broad-band circular polarization of*, A&A 275, 283

Solanki, S. K.; Pahlke, K. D.: 1988, *Can stationary velocity fields explain the Stokes V asymmetry observed in solar magnetic elements?*, A&A 201, 143

Spiegel, E. A.: 1957, *The Smoothing of Temperature Fluctuations by Radiative Transfer*., ApJ 126, 202

Spruit, H. C.: 1983, *Theory of photospheric magnetic fields*, IN: Solar and stellar magnetic fields: Origins and coronal effects; Proceedings of the Symposium, Zurich, Switzerland, Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1983, p. 41-58, 60.

- Spruit, H. C.; Zweibel, E. G.: 1979, *Convective instability of thin flux tubes*, Solar Physics 62, 15
- Spruit, H. C.: 1976, *Pressure equilibrium and energy balance of small photospheric fluxtubes*, Solar Physics 50, 269
- Spruit, H. C.: 1974, *A model of the solar convection zone*, Solar Physics 34, 277
- Steiner, O.: 2000, *The formation of asymmetric Stokes V profiles in the presence of a magnetopause*, Solar Physics 196, 245
- Steiner, O.; Grossmann-Doerth, U.; Knölker, M.; Schüssler, M.: 1998, *Dynamical Interaction of Solar Magnetic Elements and Granular Convection: Results of a Numerical Simulation*, ApJ 495, 468
- Stenflo, J. O.; Keller, C. U.; Gandorfer, A.: 1998, *Differential Hanle effect and the spatial variation of turbulent magnetic fields on the Sun*, A&A 329, 319
- Stenflo, J. O.: 1994, *Solar magnetic fields: polarized radiation diagnostics*, Astrophysics and Space Science Library, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers
- Stenflo, J. O.; Solanki, S.; Harvey, J. W.; Brault, J. W.: 1984, *Diagnostics of solar magnetic fluxtubes using a Fourier transform spectrometer*, A&A 131, 333
- Stenflo, J. O.: 1973, *Magnetic-Field Structure of the Photospheric Network*, Solar Physics 32, 41
- Stenholm, L. G.; Stenflo, J. O.: 1978, *Multi-dimensional Non-LTE Transfer of Polarized Radiation in Magnetic Fluxtubes*, A&A 67, 33
- Stix, Michael: 1989, *The Sun: An Introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Astronomy and Astrophysics Library
- Sütterlin, P.: 2001, *The size of penumbral fine structure*, A&A 374, 21
- Thomas, J. H.; Weiss, N. O.; Tobias, S. M.; Brummell, N. H.: 2002, *Magnetic flux pumping and the structure of a sunspot penumbra*, AN 323, 383
- Thomas, J. H.; Weiss, N. O.: 1992, *The theory of sunspots*, In: Sunspots: Theory and observations; Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on the Theory of Sunspots, Cambridge, United Kingdom, p. 3-59.
- Title, A. M.; Frank, Z. A.; Shine, R. A.; Tarbell, T. D.; Topka, K. P.; Scharmer, G.; Schmidt, W. : 1993, *On the magnetic and velocity field geometry of simple sunspots*, ApJ 403, 780

van Kampen, N. G.: 1985, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo

Vögler, A.; Schüssler, M.: 2003, *Studying magneto-convection by numerical simulation*, *Astronomische Nachrichten* 324, No. 4, 399

von der Lhe, O.; Schmidt, W.; Soltau, D.; Kneer, F.; Staude, J.: 1999, *GREGOR, a 1.5 M Solar Telescope*, AG Abstract Services, vol. 15. Abstracts of Contributed Talks and Posters presented at the Annual Scientific Meeting of the Astronomische Gesellschaft, Goettingen

Webb, A. R.; Roberts, B.: 1978, *Vertical motions in an intense magnetic flux tube. II - Convective instability*, *Solar Physics* 59, 249

Westendorp Plaza, C.; del Toro Iniesta, J. C.; Ruiz Cobo, B.; Martinez Pillet, V.; Lites, B. W.; Skumanich, A.: 1998, *Optical Tomography of a Sunspot. I. Comparison between Two Inversion Techniques*, *ApJ* 494, 453

ApJ : Astrophysical Journal

A&A : Astronomy & Astrophysics

A&AS : Astronomy & Astrophysics Supplements

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Staude, der mir nach Beendigung meiner Diplomarbeit in seiner Gruppe eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen des DLR-Projekts 'GROSSE' anbot und es so ermöglichte innerhalb dieser zwei Jahre die wesentlichen Grundlagen für diese Arbeit zu legen. Seine ständige Bereitschaft, auch während meiner Zeit an der TU-Berlin, sich meinen Fragen und Problemen zu widmen haben zu dem Erfolg dieser Arbeit beigetragen. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. F. Kneer und Prof. Dr. M. Stix, die sich als weitere Gutachter für diese Arbeit zur Verfügung stellten.

Ich möchte mich auch bei Herrn Dr. Horst Balthasar bedanken, der stets meinen Fragen offen gegenüberstand und diese mit großer Sachkenntnis beantwortete. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Kurt Arlt bedanken, der jederzeit bereit war, bei Problemen mit dem Computernetzwerk, mir mit Rat und Tat zur Seite zu stehen. Ebenfalls danken möchte ich Herrn Dr. A. Hofmann und Herrn Dr. J. Rendtel.

Auch danken möchte ich den ehemaligen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe optische Sonnenphysik Dr. Axel Settele, Iliya Nickelt, Alexander Pregla und Volker Landgraf für die vielen interessanten Diskussionen zum Thema Sonnenphysik sowie zu den zahlreichen anderen Themen jenseits der Sonne. Mein Dank gilt auch Frau L. Kurth und Frau M.-L. Strohbusch für die administrative Unterstützung.

Danken möchte ich besonders auch meiner Mutter, die in all den Jahren immer an mich geglaubt hat. Von ganzem Herzen möchte ich mich aber bei meiner Frau Viola und meiner Tochter Deborah bedanken ohne deren große Nachsicht und Unterstützung, ich diese Arbeit wohl nicht zu Ende gebracht hätte.